Intégrabilité algébrique du dressing chain à 5 particules

Carlos León

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers

Rencontre du GDR GDM

La Rochelle

4 juin 2019

La forme la plus générale des systèmes n-dimensionnels de *Lotka-Volterra* vient donnée par les équations différentielles

La forme la plus générale des systèmes n-dimensionnels de *Lotka-Volterra* vient donnée par les équations différentielles

$$\dot{x}_i = \varepsilon_i x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La forme la plus générale des systèmes n-dimensionnels de *Lotka-Volterra* vient donnée par les équations différentielles

$$\dot{x}_i = \varepsilon_i x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dans le cas des systèmes de *Bogoyavlenskij-Itoh* (BI), $n = 2k+1$, il n'y a pas de termes linéaires et la matrice A prend la forme

$$A \equiv (A_{i,j})_{i,j} := \mathrm{circ}(0, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1).$$

La forme la plus générale des systèmes n-dimensionnels de *Lotka-Volterra* vient donnée par les équations différentielles

$$\dot{x}_i = \varepsilon_i x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dans le cas des systèmes de *Bogoyavlenskij-Itoh* (BI), $n = 2k+1$, il n'y a pas de termes linéaires et la matrice A prend la forme

$$A \equiv (A_{i,j})_{i,j} := \mathrm{circ}(0, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1).$$

Autrement dit, $\dot{x}_i = x_i \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad i = 1, \ldots, n,$

où on utilise la convention ciclyque $x_{i+n} = x_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

- Crochet de Poisson :
  $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n = 2k + 1.$
- Hamiltonien : $H_{\mathrm{BI}} := x_1 + \cdots + x_n$.
- Equations du mouvement :
  $\dot{x}_i = \{x_i, H_{\mathrm{BI}}\}_{\mathrm{BI}} = \sum_{j=1}^{k}(x_{i+j} - x_{i-j}), \quad i = 1, \ldots, n.$
- Casimir : $C_{\mathrm{BI}} := x_1 \cdots x_n$.

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

- Crochet de Poisson :
  $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad 1 \le i, j \le n = 2k + 1.$
- Hamiltonien : $H_{\mathrm{BI}} := x_1 + \cdots + x_n.$
- Equations du mouvement :
  $\dot{x}_i = \{x_i, H_{\mathrm{BI}}\}_{\mathrm{BI}} = \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad i = 1, \ldots, n.$
- Casimir : $C_{\mathrm{BI}} := x_1 \cdots x_n.$

Bogoyavlenskij $\longrightarrow$ Représentation de Lax :

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

- ◇ Crochet de Poisson :
  $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n = 2k+1.$
- ◇ Hamiltonien : $H_{\mathrm{BI}} := x_1 + \cdots + x_n.$
- ◇ Equations du mouvement :
  $\dot{x}_i = \{x_i, H_{\mathrm{BI}}\}_{\mathrm{BI}} = \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad i = 1, \ldots, n.$
- ◇ Casimir : $C_{\mathrm{BI}} := x_1 \cdots x_n.$

Bogoyavlenskij $\longrightarrow$ Représentation de Lax :

$$(X + \lambda M)^{\cdot} = [X + \lambda M, B - \lambda M^{k+1}], \text{ où}$$

$$X_{i,j} := \delta_{i,j+k}\, x_i, \quad M_{i,j} := \delta_{i+1,j}, \quad B_{i,j} := -\delta_{i,j}(x_i + \cdots + x_{i+k}) \; .$$

En réalité,

$$p_{X+\lambda M}(\mu) = \det(X + \lambda M - \mu \mathrm{Id}) = \lambda^n - \mu^n + \sum_{j=0}^{k} (\lambda\mu)^{k-j} H_j$$

En réalité,

$$p_{X+\lambda M}(\mu) = \det(X + \lambda M - \mu \mathrm{Id}) = \lambda^n - \mu^n + \sum_{j=0}^{k} (\lambda\mu)^{k-j} H_j$$

$$H_j \in \mathbb{C}_{2j+1}[x_1, \dots, x_{x_n}], \text{ pour chaque } j \in \{0, \dots, k\},$$

$$H_0 = H_{\mathrm{BI}} = x_1 + \cdots + x_n,$$

$$H_k = C_{\mathrm{BI}} = x_1 \cdots x_n.$$

En réalité,

$$p_{X+\lambda M}(\mu) = \det(X + \lambda M - \mu \mathrm{Id}) = \lambda^n - \mu^n + \sum_{j=0}^{k} (\lambda\mu)^{k-j} H_j$$

$$H_j \in \mathbb{C}_{2j+1}[x_1, \ldots, x_{x_n}], \text{ pour chaque } j \in \{0, \ldots, k\},$$
$$H_0 = H_{\mathrm{BI}} = x_1 + \cdots + x_n,$$
$$H_k = C_{\mathrm{BI}} = x_1 \cdots x_n.$$

Itoh $\longrightarrow$ $(\mathbb{C}^n, \{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{BI}}, (H_0, \ldots, H_k))$ est un système intégrable au sens de Liouville.

On va s'intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI.

On va s'intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI. Soient $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ des paramètres de déformation, tels que

$$\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n = 0.$$

On considère maintenant le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

On va s'intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI. Soient $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ des paramètres de déformation, tels que

$$\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n = 0.$$

On considère maintenant le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

De même, le système ci-dessus admet une formulation hamiltonienne :

- ◇ Soient $\beta_{i,j}$ tels que $\beta_{j,i} = -\beta_{i,j}$ et $\beta_{i,j} = 0$ si $|i-j| \notin \{k, k+1\}$.
- ◇ $\{x_i, x_j\}^{\epsilon}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i\, x_j + \beta_{i,j}, \qquad \epsilon_i = \beta_{i,i+k} - \beta_{i-k,k},$
- ◇ $H_{\mathrm{BI}^\epsilon} = H_{\mathrm{BI}} = x_1 + \cdots + x_n.$

Evripidou, Kassotakis et *Vanhaecke* ont démontré que

$$(\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{BI}^\epsilon}, (H_0^\epsilon, \ldots, H_k^\epsilon))$$

est un système intégrable au sens de Liouville.

Evripidou, Kassotakis et *Vanhaecke* ont démontré que

$$(\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{BI}^\epsilon}, (H_0^\epsilon, \dots, H_k^\epsilon))$$

est un système intégrable au sens de Liouville.

Opérateur de Lax : $L(\lambda) := X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M$, où $\Delta_{i,j} := \delta_{i,j}\beta_{i+k,j}$.

Evripidou, Kassotakis et *Vanhaecke* ont démontré que

$$(\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{BI}^\epsilon}, (H_0^\epsilon, \ldots, H_k^\epsilon))$$

est un système intégrable au sens de Liouville.

Opérateur de Lax : $L(\lambda) := X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M$, où $\Delta_{i,j} := \delta_{i,j}\beta_{i+k,j}$.

$$p_{L(\lambda)}(\mu) = \lambda^n + \lambda^{-n} \prod_{j=1}^{n} (\beta_{j+k,j} - \lambda\mu) + \sum_{j=0}^{k} (\lambda\mu)^{k-j} H_j^\epsilon.$$

Evripidou, Kassotakis et *Vanhaecke* ont démontré que

$$(\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{BI}^\epsilon}, (H_0^\epsilon, \ldots, H_k^\epsilon))$$

est un système intégrable au sens de Liouville.

Opérateur de Lax : $L(\lambda) := X + \lambda^{-1}\Delta + \lambda M$, où $\Delta_{i,j} := \delta_{i,j}\beta_{i+k,j}$.

$$p_{L(\lambda)}(\mu) = \lambda^n + \lambda^{-n}\prod_{j=1}^{n}(\beta_{j+k,j} - \lambda\mu) + \sum_{j=0}^{k}(\lambda\mu)^{k-j}H_j^\epsilon.$$

Question : Le système BI^ϵ est-il algébriquement complètement intégrable (a.c.i.) ?

Soit $\mathcal{F} := (\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial et $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ est constitué de polynômes. On dit que $\mathcal{F}$ est une système a.c.i. si

.

Soit $\mathcal{F} := (\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial et $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ est constitué de polynômes. On dit que $\mathcal{F}$ est une système a.c.i. si

- Pour $\kappa \in \mathbb{C}^s$ générique, la fibre $\mathbf{F}_\kappa$ est isomorphe à une partie affine d'un tore complexe algébrique,

  $$\mathbf{F}_\kappa \simeq \left(\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_\kappa\right) - \mathcal{D}_\kappa,$$

  où Λ_κ est un réseau dans $\mathbb{C}^{n-s}$ est $\mathcal{D}_\kappa$ est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_\kappa$;
- Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}_{F_i}$, restreints à $\mathbf{F}_\kappa$ sont constants.

.

Soit $\mathcal{F} := (\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial et $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ est constitué de polynômes. On dit que $\mathcal{F}$ est une système a.c.i. si

- Pour $\kappa \in \mathbb{C}^s$ générique, la fibre $\mathbf{F}_\kappa$ est isomorphe à une partie affine d'un tore complexe algébrique,

  $$\mathbf{F}_\kappa \simeq \left(\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_\kappa\right) - \mathcal{D}_\kappa,$$

  où Λ_κ est un réseau dans $\mathbb{C}^{n-s}$ est $\mathcal{D}_\kappa$ est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_\kappa$;
- Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}_{F_i}$, restreints à $\mathbf{F}_\kappa$ sont constants.

On va aborder la question de l'intégrabilité algébrique du système déformé dans le cas $n = 5$ (*i.e.*, $k = 2$).

On a alors le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \left(x_{i+1} + x_{i+2} - x_{i-1} - x_{i-2}\right) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

On a alors le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \left(x_{i+1} + x_{i+2} - x_{i-1} - x_{i-2}\right) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

$$\{x_i, x_j\}^{\epsilon}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i\, x_j + \beta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq 5.$$

On a alors le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \left(x_{i+1} + x_{i+2} - x_{i-1} - x_{i-2}\right) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

$$\{x_i, x_j\}^{\epsilon}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i\, x_j + \beta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq 5.$$

- $H_1^{\epsilon} := \sum_{i=1}^{5} x_i,$
- $H_2^{\epsilon} := \sum_{i=1}^{5} x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^{5} (\beta_{i+1,i-2} + \beta_{i+2,i-1})x_i,$
- $H_3^{\epsilon} := \prod_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} (\beta_{i+1,i-2}\beta_{i+2,i-1})x_i + \sum_{i=1}^{5} \beta_{i-1,i+1}x_{i-2}x_i x_{i+2}.$

Pour étudier l'intégrabilité algébrique du $\mathrm{BI}^{\epsilon}-5$, on utilise *l'analyse de Painlevè*.

Pour étudier l'intégrabilité algébrique du $\mathrm{BI}^{\epsilon} - 5$, on utilise *l'analyse de Painlevè*.

On commence par chercher des solutions de Laurent formelles homogènes

$$x_i(t) = \frac{1}{t} \sum_{j \geq 0} x_i^{(j)} t^j.$$

Pour étudier l'intégrabilité algébrique du $\mathrm{BI}^{\epsilon}-5$, on utilise *l'analyse de Painlevè*.

On commence par chercher des solutions de Laurent formelles homogènes

$$x_i(t)=\frac{1}{t}\sum_{j\geq 0}x_i^{(j)}t^j.$$

A partir de l'approche précédente, il est possible d'écrire une famille de solutions de Laurent en fonction de 4 paramètres (a, b, c et d), ce que l'on appelle *une balance principale* :

- $x_1(t)=a+\left(u_1^{(1)}+p_1^{(1)}(\epsilon;a,b,c)\right)t+\left(u_1^{(2)}+p_1^{(2)}(\epsilon;a,b,c)\right)t^2+O\left(t^3\right)$,
- $x_2(t)=-\epsilon_2 t+\left(u_2^{(2)}+p_2^{(2)}(\epsilon;a,b,c)\right)t^2+O\left(t^3\right)$,
- $x_3(t)=b+\left(u_3^{(1)}+p_3^{(1)}(\epsilon;a,b,c)\right)t+\left(u_3^{(2)}+p_3^{(2)}(\epsilon;a,b,c)\right)t^2+O\left(t^3\right)$,
- $x_4(t)=\frac{1}{t}+c+\left(u_4^{(1)}+p_4^{(1)}(\epsilon;a,b,c)\right)t+\left(u_4^{(2)}+p_4^{(2)}(\epsilon;a,b,c)\right)t^2+O\left(t^3\right)$,
- $x_5(t)=-\frac{1}{t}+(b+c-a)+\left(u_5^{(1)}+p_5^{(1)}(\epsilon;a,b,c)\right)t+dt^2+O\left(t^3\right)$.

Ensuite, pour un point générique $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$, on considère la courbe dans le plan définie par les équations $H_i^\epsilon(x(t)) = \kappa_i$, pour $1 \leq i \leq 3$. Cette courbe est isomorphe à

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \quad & a^3b^2 + a^2b^3 + q_{2,2}(\epsilon,\kappa)a^2b^2 + q_{2,1}(\epsilon,\kappa)a^2b + q_{1,2}(\epsilon,\kappa)ab^2 \\ & +q_{1,1}(\epsilon,\kappa)ab + q_{1,0}(\epsilon,\kappa)a + q_{0,1}(\epsilon,\kappa)b + q_{0,0}(\epsilon,\kappa) = 0,\end{aligned}$$

Ensuite, pour un point générique $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$, on considère la courbe dans le plan définie par les équations $H_i^\epsilon(x(t)) = \kappa_i$, pour $1 \leq i \leq 3$. Cette courbe est isomorphe à

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \quad & a^3b^2 + a^2b^3 + q_{2,2}(\epsilon,\kappa)a^2b^2 + q_{2,1}(\epsilon,\kappa)a^2b + q_{1,2}(\epsilon,\kappa)ab^2 \\ & + q_{1,1}(\epsilon,\kappa)ab + q_{1,0}(\epsilon,\kappa)a + q_{0,1}(\epsilon,\kappa)b + q_{0,0}(\epsilon,\kappa) = 0,\end{aligned}$$

où $q_{i,j}(\epsilon,\kappa)$ sont des polynômes dans les variables ϵ et κ, tels que

$$q_{2,1}(0,\kappa) = q_{1,2}(0,\kappa) = q_{1,0}(0,\kappa) = q_{0,1}(0,\kappa) = 0,$$

$$q_{2,2}(0,\kappa) = -\kappa_1, \;\; q_{1,1}(0,\kappa) = \kappa_2 \;\text{ et }\; q_{0,0}(0,\kappa) = -\kappa_3.$$

Ensuite, pour un point générique $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{C}^3$, on considère la courbe dans le plan définie par les équations $H_i^\epsilon(x(t)) = \kappa_i$, pour $1 \leq i \leq 3$. Cette courbe est isomorphe à

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \quad & a^3b^2 + a^2b^3 + q_{2,2}(\epsilon,\kappa)a^2b^2 + q_{2,1}(\epsilon,\kappa)a^2b + q_{1,2}(\epsilon,\kappa)ab^2 \\ & +q_{1,1}(\epsilon,\kappa)ab + q_{1,0}(\epsilon,\kappa)a + q_{0,1}(\epsilon,\kappa)b + q_{0,0}(\epsilon,\kappa) = 0,\end{aligned}$$

où $q_{i,j}(\epsilon,\kappa)$ sont des polynômes dans les variables ϵ et κ, tels que

$$q_{2,1}(0,\kappa) = q_{1,2}(0,\kappa) = q_{1,0}(0,\kappa) = q_{0,1}(0,\kappa) = 0,$$

$$q_{2,2}(0,\kappa) = -\kappa_1,\ \ q_{1,1}(0,\kappa) = \kappa_2 \ \text{ et } \ q_{0,0}(0,\kappa) = -\kappa_3.$$

Le modèle projectif lisse de cette courbe, également noté Γ_1, possède cinq points à l'infini, qui seront désignés par ∞, ∞_-, $\infty_-^{'}$, ∞_+ et $\infty_+^{'}$.

En termes d'un paramètre local η :

$$\begin{aligned}
\infty : \quad & a = \frac{1}{\eta}, \quad b = -\frac{1}{\eta} + \kappa_1 + (\beta_{2,4} - \beta_{3,5} + \beta_{4,1} - \beta_{5,2})\eta + O(\eta^2), \\
\infty_- : \quad & a = \frac{1}{\eta}, \quad b = (-\beta_{1,3} + \beta_{5,2})\eta + \frac{q_{0,0}(\beta_{5,2},\kappa)}{\beta_{3,5} - \beta_{5,2}}\eta^2 + O(\eta^3), \\
\infty_-' : \quad & a = \frac{1}{\eta}, \quad b = (-\beta_{1,3} + \beta_{3,5})\eta - \frac{q_{0,0}(\beta_{3,5},\kappa)}{\beta_{3,5} - \beta_{5,2}}\eta^2 + O(\eta^3), \\
\infty_+ : \quad & a = \frac{1}{\eta}, \quad b = (-\beta_{1,3} + \beta_{2,4})\eta + \frac{q_{0,0}(\beta_{2,4},\kappa)}{\beta_{2,4} - \beta_{4,1}}\eta^2 + O(\eta^3), \\
\infty_+' : \quad & a = \frac{1}{\eta}, \quad b = (-\beta_{1,3} + \beta_{4,1})\eta - \frac{q_{0,0}(\beta_{4,1},\kappa)}{\beta_{2,4} - \beta_{4,1}}\eta^2 + O(\eta^3).
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\kappa \in \mathbb{C}^3$ générique, on s'intéresse à la construction d'un plongement de la variété $\mathbf{F}_\kappa := \{x \in \mathbb{C}^5 \,|\, H_i^\epsilon(x) = \kappa_i,\ 1 \leq i \leq 3\}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$.

Maintenant, pour $\kappa \in \mathbb{C}^3$ générique, on s'intéresse à la construction d'un plongement de la variété $\mathbf{F}_\kappa := \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i^\epsilon(x) = \kappa_i,\ 1 \leq i \leq 3\}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$.

L'idée est de chercher tous les polynômes z_i homogènes à poids, tels que $z_i(x(t))$ ait un pôle d'ordre au plus 1, et qu'ils soient indépendants sur l'algèbre engendrée par H_1^ϵ, H_2^ϵ et H_3^ϵ.

Maintenant, pour $\kappa \in \mathbb{C}^3$ générique, on s'intéresse à la construction d'un plongement de la variété $\mathbf{F}_\kappa := \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i^\epsilon(x) = \kappa_i,\ 1 \leq i \leq 3\}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$.

L'idée est de chercher tous les polynômes z_i homogènes à poids, tels que $z_i(x(t))$ ait un pôle d'ordre au plus 1, et qu'ils soient indépendants sur l'algèbre engendrée par H_1^ϵ, H_2^ϵ et H_3^ϵ.

On considère les 25 polynômes

$$z_0 := 1,$$

$$z_i := x_i, \quad i = 1, \ldots, 4,$$

$$z_{4+i} := x_i x_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

$$z_{9+i} := x_{i-2} x_i x_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, 4,$$

$$z_{13+i} := x_{i-2} x_i^2 x_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

$$z_{19} := x_4 x_3 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \epsilon_1),$$

$$z_{19+i} := x_{i-2} x_i^3 x_{i+2} + x_i^2 (\epsilon_{i-2} x_{i+2} - \epsilon_{i+2} x_{i-2}), \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Pour chacune des cinq familles de balances principales, l'application $x \mapsto (1 : z_1(x) : \cdots : z_{24}(x))$ s'étend à un plongement holomorphique $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{24}$.

Pour chacune des cinq familles de balances principales, l'application $x \mapsto (1 : z_1(x) : \cdots : z_{24}(x))$ s'étend à un plongement holomorphique $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{24}$.

On notera

$$\mathcal{D}_\kappa^{(i)} := \overline{\varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})},$$

$$P_i := \varphi_\kappa^{(i)}(\infty_i) \ \text{ et } \ Q_i := \varphi_\kappa^{(i+2)}(\infty_{i+2,-}).$$

Pour chacune des cinq familles de balances principales, l'application $x \mapsto (1 : z_1(x) : \cdots : z_{24}(x))$ s'étend à un plongement holomorphique $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{24}$.

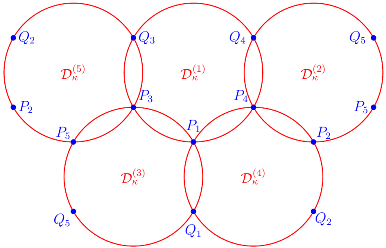
On notera

$$\mathcal{D}_\kappa^{(i)} := \overline{\varphi_\kappa^{(i)}(\Gamma_\kappa^{(i)})},$$

$$P_i := \varphi_\kappa^{(i)}(\infty_i) \text{ et } Q_i := \varphi_\kappa^{(i+2)}(\infty_{i+2,-}).$$

Les informations de l'analyse peuvent être résumées dans le tableau suivant :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
Q_4	Q_5	Q_1	Q_2	Q_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_3	Q_4	Q_5	Q_1	Q_2
P_3	P_4	P_5	P_1	P_2



Cas intermédiaires

Cas intermédiaires

Un epsilon est égal à zero :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4 Q_4	P_5	P_1 Q_1	P_2 Q_2	P_3 Q_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_3 P_3	Q_4 P_4	P_5	Q_1 P_1	Q_2 P_2

Cas intermédiaires

Un epsilon est égal à zero :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4 Q_4	P_5	P_1 Q_1	P_2 Q_2	P_3 Q_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_3 P_3	Q_4 P_4	P_5	Q_1 P_1	Q_2 P_2

Deux epsilon sont égaux à zero :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4 Q_4	P_5	P_1	P_2 Q_2	P_3 Q_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_3 P_3	Q_4 P_4	P_5	P_1	Q_2 P_2

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4 Q_4	P_5	P_1 Q_1	P_2	P_3 Q_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_3 P_3	Q_4 P_4	P_5	Q_1 P_1	P_2

Trois epsilon sont égaux à zero :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_1	P_2	P_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	P_4	P_5 Q_5	Q_1 P_1	P_2

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4	P_5 Q_5	P_1	P_2 Q_2	P_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_2	P_2

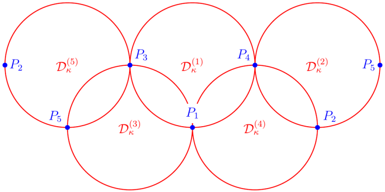
Trois epsilon sont égaux à zero :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_1	P_2	P_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	P_4	P_5 Q_5	Q_1 P_1	P_2

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4	P_5 Q_5	P_1	P_2 Q_2	P_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_2	P_2

Cas non-déformé :

$\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(3)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(4)}$	$\mathcal{D}_\kappa^{(5)}$
P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	P_4	P_5	P_1	P_2



Une ouverture du problème étudié

Une ouverture du problème étudié

Considérons le système périodique de *Kac-van Moerbeke* (KM) à 5 particules :

$$\dot{x}_i = x_i(x_{i-1} - x_{i+1}), \qquad i = 1, \ldots, 5,$$

Une ouverture du problème étudié

Considérons le système périodique de *Kac-van Moerbeke* (KM) à 5 particules :

$$\dot{x}_i = x_i(x_{i-1} - x_{i+1}), \qquad i = 1, \ldots, 5,$$

$\left(\mathbb{C}^5, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{KM}}, (G_1, G_2, G_3)\right)$ est un système intégrable au sens de Liouville, où

$$\{x_i, x_j\}_{\mathrm{KM}} := R_{i,j} x_i x_j, \qquad R \equiv (R_{i,j}) := \mathrm{circ}(0, -1, 0, 0, 1),$$

$$G_1 := \textstyle\sum_{i=1}^5 x_i, \;\; G_2 := \sum_{i=1}^5 x_i x_{i+2} \;\text{ et }\; G_3 := \prod_{i=1}^5 x_i.$$

Une ouverture du problème étudié

Considérons le système périodique de *Kac-van Moerbeke* (KM) à 5 particules :

$$\dot{x}_i = x_i(x_{i-1} - x_{i+1}), \qquad i = 1, \dots, 5,$$

$\big(\mathbb{C}^5, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{KM}}, (G_1, G_2, G_3)\big)$ est un système intégrable au sens de Liouville, où

$$\{x_i, x_j\}_{\mathrm{KM}} := R_{i,j} x_i x_j, \qquad R \equiv (R_{i,j}) := \mathrm{circ}(0, -1, 0, 0, 1),$$

$$G_1 := \textstyle\sum_{i=1}^5 x_i,\ \ G_2 := \sum_{i=1}^5 x_i x_{i+2}\ \text{ et }\ G_3 := \prod_{i=1}^5 x_i.$$

On a un diagramme comme celui qui suit :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{BI}^{\epsilon} - 5 \arrow[r, "\psi"] & ? \\
\mathrm{BI} - 5 \arrow[u, "\text{déf}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\psi"] & \mathrm{KM} - 5 \arrow[u, "\text{déf}"']
\end{tikzcd}$$

Merci de votre attention !