Decaimiento de soluciones de ecuaciones dispersivas

Carlos Augusto León Gil

Universidad Nacional de Colombia sede Medellín
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

XX Congreso Colombiano de Matemáticas
Manizales
2015

Presentación

Presentación

Nuestro punto de partida será la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \qquad \text{(KdV)}$$
$$u = u(x,t), \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Nuestro punto de partida será la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \qquad \text{(KdV)}$$
$$u = u(x,t), \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Pretendemos encontrar el máximo grado de decaimiento exponencial espacial que puede presentar una solución u de esta ecuación, hecho que está relacionado con la continuación única de propiedades para las soluciones de la misma.

Para la ecuación KdV, se probó en [1] que si la diferencia de dos soluciones de la ecuación KdV decaen para $x > 0$ como

$$e^{-a\,x^{3/2}}$$

en dos tiempos distintos, para todo $a > 0$, entonces ambas soluciones coinciden.

Para la ecuación KdV, se probó en [1] que si la diferencia de dos soluciones de la ecuación KdV decaen para $x > 0$ como

$$e^{-a\,x^{3/2}}$$

en dos tiempos distintos, para todo $a > 0$, entonces ambas soluciones coinciden.

En particular, si una solución u presenta este comportamiento en $t = 0$, entonces u no puede tener el mismo decaimiento en otro tiempo.

Sin embargo, si $u(x,0)$ decae para $x > 0$ como

$$e^{-a_0\,x^{3/2}},$$

para cierto $a_0 > 0$, podemos preguntarnos cómo se degrada este decaimiento a medida que el tiempo evoluciona.

Para resolver este interrogante, exploramos en primer lugar el problema lineal asociado a la ecuación KdV,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0,$$

Para resolver este interrogante, exploramos en primer lugar el problema lineal asociado a la ecuación KdV,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0,$$

cuya solución, viene dada por

$$S_t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}}\, A\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3t}}\right),$$

donde $A(x) = C \int e^{i\xi x} e^{it\xi^3/3}\, d\xi$ es la función de Airy.

Del comportamiento asintótico de la función de Airy, se conoce que para $x >> 0$

$$A(x) \sim x^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}},$$

por lo que

$$S_t(x) \sim t^{-1/4} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3\sqrt{3t}}x^{3/2}}.$$

Del comportamiento asintótico de la función de Airy, se conoce que para $x >> 0$

$$A(x) \sim x^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}},$$

por lo que

$$S_t(x) \sim t^{-1/4} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3\sqrt{3t}}x^{3/2}}.$$

En $t_1 = \frac{4}{27\, a_0^2}$ tenemos

$$S_{t_1}(x) \sim t_1^{-1/4} x^{-1/4} e^{-a_0\, x^{3/2}}.$$

Por lo tanto, para $x > 0$, la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = 0, \\ u(x,0) = S_{t_1}(x), \end{cases}$$

es tal que

$$u(x,t) \sim \frac{C}{\sqrt{1+\frac{27}{4}\,a_0^2 t}}\, e^{-\frac{a_0}{\sqrt{1+\frac{27}{4}\,a_0^2 t}} x^{3/2}}.$$

Presentación

Para la ecuación no lineal podríamos esperar un comportamiento similar al observado en el problema lineal.

Es decir, si el dato inicial decae para $x > 0$ como $e^{-a_0\,x^{3/2}}$, esperamos que la solución de la ecuación KdV muestre un decaimiento exponencial de orden $3/2$ pero con una degradación en su coeficiente.

En conreto, se propone mostrar el siguiente resultado:

Teorema

Para $t_0 > 0$, *sea* $u \in C\left([0,t_0]; H^3(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,t_0]; L^2(\mathbb{R})\right)$ *una solución de la ecuación KdV. Supongamos que para* $a_0 > 0$,

$$u(0)e^{a_0\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Sea

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4} a_0^2 t}}, \quad t \in [0,t_0].$$

Entonces $\left\| u(t)e^{a(t)\, x_+^{3/2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c$, *para todo* $t \in [0,t_0]$.

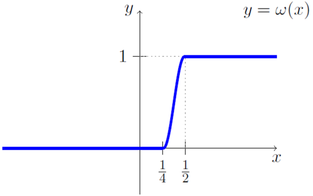
En principio sólo se considera que a es una función diferenciable en $[0, t_0]$, con $a(0) = a_0$. En la prueba se encontrará que $a(t)$ está dada por

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4} a_0^2 t}}.$$

En principio sólo se considera que a es una función diferenciable en $[0, t_0]$, con $a(0) = a_0$. En la prueba se encontrará que $a(t)$ está dada por

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4} a_0^2 t}}.$$

Vamos a hacer un estimativo a priori de u. Para ello tomamos en primer lugar una función $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, como se muestra en la figura:



Adicionalmente, para cada entero positivo n, consideramos la función $\psi = \psi_n$, dada por

$$\psi_n(x,t) := \begin{cases} \omega(x)\, a(t)\, x^{3/2}, & \text{si} \quad x \leq n \\ \ln\left(P_n(x,t)\right), & \text{si} \quad x > n, \end{cases}$$

donde, para $t \in [0, t_0]$ fijo, $P_n(x,t)$ es el polinomio de segundo grado en x que coincide con $\varphi_n(x,t) := e^{\psi_n(x,t)}$ en $x = n$ junto con sus dos primeras derivadas.

Adicionalmente, para cada entero positivo n, consideramos la función $\psi = \psi_n$, dada por

$$\psi_n(x,t) := \begin{cases} \omega(x)\, a(t)\, x^{3/2}, & \text{si} \quad x \leq n \\ \ln\left(P_n(x,t)\right), & \text{si} \quad x > n, \end{cases}$$

donde, para $t \in [0, t_0]$ fijo, $P_n(x,t)$ es el polinomio de segundo grado en x que coincide con $\varphi_n(x,t) := e^{\psi_n(x,t)}$ en $x = n$ junto con sus dos primeras derivadas.

Ahora definimos $f = u\, e^{\psi}$ y reemplazamos $u = e^{-\psi} f$ en la ecuación KdV.

A continuación multiplicamos la expresión resultante por f e integramos sobre $\mathbb{R}$ respecto a la variable x:

$$\int(\partial_t f)f - \int \psi_t f^2 + \int(\partial_x^3 f)f - 3\int \psi_x(\partial_x^2 f)f + 3\int(\psi_x^2 - \psi_{xx})(\partial_x f)f$$
$$+ \int(3\,\psi_x\psi_{xx} - \psi_x^3 - \psi_{xxx})f^2 + \int e^{-\psi}(\partial_x f)f^2 - \int e^{-\psi}\psi_x f^3 = 0.$$

A continuación multiplicamos la expresión resultante por f e integramos sobre $\mathbb{R}$ respecto a la variable x:

$$\int (\partial_t f) f - \int \psi_t f^2 + \int (\partial_x^3 f) f - 3 \int \psi_x (\partial_x^2 f) f + 3 \int (\psi_x^2 - \psi_{xx})(\partial_x f) f$$
$$+ \int (3\,\psi_x \psi_{xx} - \psi_x^3 - \psi_{xxx}) f^2 + \int e^{-\psi} (\partial_x f) f^2 - \int e^{-\psi} \psi_x f^3 = 0.$$

Después de integrar por partes en la expresión anterior y reorganizar términos, se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int f^2 + 3 \int \psi_x (\partial_x f)^2 - \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 - \frac{2}{3} \int e^{-\psi} \psi_x f^3 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int f^2 \leq \int (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3} \int e^{-\psi} \psi_x f^3. \quad \clubsuit$$

Queremos aplicar el *Lema de Gronwall* para estimar $\int f^2$. Para ello, pretendemos acotar uniformemente en t a la expresión

$$\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}. \qquad \diamond$$

Queremos aplicar el *Lema de Gronwall* para estimar $\int f^2$. Para ello, pretendemos acotar uniformemente en t a la expresión

$$\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}. \qquad \diamond$$

- Al analizar $\diamond$ en $1 \leq x \leq n$ se obtiene

$$\left(a' x^{3/2} + \frac{27}{8}\, a^3 x^{3/2} - \frac{3}{8}\, a\, x^{-3/2} \right) f^2,$$

lo cual lleva a plantear el PVI:

$$\begin{cases} a'(t) + \dfrac{27}{8}\, a(t)^3 = 0, \\ a(0) = a_0, \end{cases}$$

cuya solución está dada por

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4} a_0^2 t}}.$$

Con esta elección de a, resulta que las integrales del lado derecho de ♣, realizadas en $1 \leq x \leq n$, están acotadas por

$$\|x_+^{1/2} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])} \int_{\mathbb{R}} f^2.$$

Con esta elección de a, resulta que las integrales del lado derecho de ♣, realizadas en $1 \leq x \leq n$, están acotadas por

$$\|x_+^{1/2} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])} \int_{\mathbb{R}} f^2.$$

- A continuación analizamos la contribución del intervalo (n, ∞) para las integrales del lado derecho de ♣. En este caso,

$$\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx} = \frac{1}{P^3}\left[P^2 P_t + 3\,P_x^3 - 3\,P\,P_x P_{xx}\right],$$

donde

$$P(x,t) = \left[1 + \frac{3}{2}\,a\,n^{1/2}(x-n) + \left(\frac{3}{8}\,a\,n^{-1/2} + \frac{9}{8}\,a^2 n\right)(x-n)^2\right] e^{a\,n^{3/2}}.$$

Ahora, definiendo $r := a\, n^{1/2}(x-n)$ y usando que $a' = -\frac{27}{8}a^3$ se tiene:

$$P = \left[1 + \frac{3}{2}\, r + \left(\frac{9}{8} + \epsilon_n^{(1)}\right) r^2\right] e^{a\, n^{3/2}},$$

$$P_t = -\frac{27}{8}\, a^3 n^{3/2} \left[1 + \left(\frac{3}{2} + \epsilon_n^{(2)}\right) r + \left(\frac{9}{8} + \epsilon_n^{(3)}\right) r^2\right] e^{a\, n^{3/2}},$$

$$P_x = a\, n^{1/2} \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{9}{4} + \epsilon_n^{(4)}\right) r\right] e^{a\, n^{3/2}} \quad \text{y}$$

$$P_{xx} = a^2 n \left(\frac{9}{4} + \epsilon_n^{(4)}\right) e^{a\, n^{3/2}},$$

donde

$$\epsilon_n^{(1)} = \epsilon_n^{(1)}(t) = \frac{3}{8\, a\, n^{3/2}}, \quad \epsilon_n^{(2)} = \epsilon_n^{(2)}(t) = \frac{3}{2\, a\, n^{3/2}},$$

$$\epsilon_n^{(3)} = \epsilon_n^{(3)}(t) = \frac{21}{8\, a\, n^{3/2}} + \frac{3}{8\, a^2 n^3} \quad \text{y} \quad \epsilon_n^{(4)} = \epsilon_n^{(4)}(t) = \frac{3}{4\, a\, n^{3/2}}.$$

Calculando $P^2 P_t + 3\,P_x^3 - 3\,P\,P_x P_{xx}$, después de tomar formalmente $\epsilon_n^{(j)} = 0,\ \ j = 1, 2, 3, 4$, se obtiene:

$$a^3 n^{3/2} e^{3\,a\,n^{3/2}} \left(-\frac{19683}{4096}\,r^6 - \frac{19683}{1024}\,r^5 - \frac{19683}{512}\,r^4 - \frac{3645}{128}\,r^3 - \frac{27}{8} \right) < 0.$$

Calculando $P^2 P_t + 3\,P_x^3 - 3\,P\,P_x P_{xx}$, después de tomar formalmente $\epsilon_n^{(j)} = 0$, $\; j = 1,2,3,4$, se obtiene:

$$a^3 n^{3/2} e^{3\,a\,n^{3/2}} \left(-\frac{19683}{4096}\,r^6 - \frac{19683}{1024}\,r^5 - \frac{19683}{512}\,r^4 - \frac{3645}{128}\,r^3 - \frac{27}{8} \right) < 0.$$

También es claro, a partir de la definición de los $\epsilon_n^{(j)}$, que $\epsilon_n^{(j)}(t) \leq \epsilon_n^{(j)}(t_0)$, para todo $t \in [0, t_0]$ y todo $j = 1,2,3,4$, con lo cual $\epsilon_n(t) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ uniformemente en t. Así, por la continuidad de los coeficientes de las potencias de r como funciones de ϵ_n, en el intervalo (n, ∞):

$$(\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 \leq 0,$$

para n mayor que cierto entero N.

A partir de lo anterior, se puede comprobar que las integrales del lado derecho de ♣, realizadas en el intervalo (n, ∞), están acotadas por

$$3(1+a_0^2)\left\|x_+^2 u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])}\int_{\mathbb{R}} f^2.$$

A partir de lo anterior, se puede comprobar que las integrales del lado derecho de ♣, realizadas en el intervalo (n, ∞), están acotadas por

$$3(1 + a_0^2) \left\| x_+^2 u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])} \int_{\mathbb{R}} f^2.$$

- De otra parte, para $x < 1/4$, como $\psi = 0$ entonces

$$\int_{-\infty}^{1/4} (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{1/4} e^{-\psi} \psi_x f^3 = 0.$$

Cabe aclarar que hemos definido ψ a partir de la función de truncamiento ω con el fin de evitar el no acotamiento de la tercera derivada espacial de $a\,x^{3/2}$ cerca del origen.

Cabe aclarar que hemos definido ψ a partir de la función de truncamiento ω con el fin de evitar el no acotamiento de la tercera derivada espacial de $a\,x^{3/2}$ cerca del origen.

- En $[\frac{1}{4}, 1]$ tenemos que $\psi(x,t) = \omega(x)a(t)x^{3/2}$. Ahora, Usando el hecho de que $a \leq a_0$, teniendo en cuenta que ω y sus derivadas son acotadas y observando que en el soporte de dichas funciones $x > \frac{1}{4}$, se puede concluir que, para $x \in [\frac{1}{4}, 1]$,
$$\left|\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}\right| \leq C\,(1 + a_0^3).$$
En consecuencia,
$$\left|\int_{1/4}^{1} (\psi_t + \psi_x^3 + \psi_{xxx}) f^2 + \frac{2}{3}\int_{1/4}^{1} e^{-\psi}\psi_x f^3\right|$$
$$\leq C\,(1 + a_0^3)\left(1 + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])}\right)\int_{\mathbb{R}} f^2.$$

A partir de lo anterior, se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int f^2 \leq C\,(1+a_0^3)\,\left\|(1+x_+^2)u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])}\int f^2,$$

donde C es una constante universal. Esto es,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u^2\,\varphi_n^2\,dx \leq C\,(1+a_0^3)\,\left\|(1+x_+^2)u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])}\int u^2\,\varphi_n^2\,dx.$$

A partir de lo anterior, se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int f^2 \leq C\,(1+a_0^3)\,\left\|(1+x_+^2)u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])}\int f^2,$$

donde C es una constante universal. Esto es,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u^2\,\varphi_n^2\,dx \leq C\,(1+a_0^3)\,\left\|(1+x_+^2)u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t_0])}\int u^2\,\varphi_n^2\,dx.$$

Del *lema de Gronwall*, existe una constante K independiente de $t \in [0,t_0]$ tal que

$$\int u(t)^2\,\varphi_n(x,t)^2\,dx \leq e^{Kt_0}\int u(0)^2\,\varphi_n(x,0)^2\,dx. \quad \dagger$$

Hechos:

Hechos:

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x,t) \longrightarrow e^{\omega(x)a(t)x_+^{3/2}}$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Hechos:

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x,t) \longrightarrow e^{\omega(x)a(t)x_+^{3/2}}$ cuando $n \longrightarrow \infty$.
- $\varphi_n(x,0) = P_n(x,0) \leq \tilde{C}\, e^{a_0 x^{3/2}}$, dado que

$$\partial_x^2 P_n(x,0) \leq \frac{d^2}{dx^2}\, e^{a_0 x^{3/2}}, \quad \text{para } \; x \geq n,$$

si n es suficientemente grande.
Así, el integrando del lado derecho de † está acotado por una función integrable en la variable x.

Finalmente, en †, aplicando el Lema de Fatou en el lado izquierdo y el Teorema de la convergencia dominada en el lado derecho, lo anterior implica que para todo $t \in [0, t_0]$,

$$\int \left(u(t)\, e^{\omega(x)\, a(t)\, x_+^{3/2}}\right)^2 dx \leq e^{K t_0} \int \left(u(0)\, e^{a_0\, x_+^{3/2}}\right)^2 dx.$$

Se puede ver además que $e^{a(t)\, x_+^{3/2}} \leq C\, e^{\omega(x)\, a(t)\, x_+^{3/2}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto, para todo $t \in [0, t_0]$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(u(t)\, e^{a(t)\, x_+^{3/2}}\right)^2 dx \leq C\, e^{K t_0} \int_{\mathbb{R}} \left(u(0)\, e^{a_0\, x_+^{3/2}}\right)^2 dx. \quad \square$$

En virtud de la preservación del decaimiento exponencial para la ecuación KdV, la hipótesis de decaimiento de $u(0)$ junto con el hecho de que $u \in C\left([0, t_0]; H^3(\mathbb{R})\right)$ y argumentos de interpolación, se sigue que

$$\sup_{t \in [0,t_0]} \|\partial_x^j e^x u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty,$$

y en particular que

$$\sup_{t \in [0,t_0]} \|\partial_x^j x_+^n u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$$

para $j = 0, 1, 2$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, usando el embebimiento $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que $|x_+^n u(x,t)| \leq C_{a_0,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, t_0]$.

Este resultado mejora un resultado previo de *P. Isaza*, *F. Linares* y *G. Ponce* [2], en el siguiente sentido:
Con las hipótesis técnicas necesarias,

Este resultado mejora un resultado previo de *P. Isaza*, *F. Linares* y *G. Ponce* [2], en el siguiente sentido:
Con las hipótesis técnicas necesarias,

- de acuerdo con [2],
  $u(0)e^{a_0\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow u(t)e^{\alpha(t)\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R})$, donde
  $$\alpha(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1+27a_0^2 t}};$$

Este resultado mejora un resultado previo de *P. Isaza*, *F. Linares* y *G. Ponce* [2], en el siguiente sentido:
Con las hipótesis técnicas necesarias,

- de acuerdo con [2],
  $u(0)e^{a_0\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow u(t)e^{\alpha(t)\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R})$, donde
  $$\alpha(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + 27a_0^2 t}};$$
- en este resultado,
  $u(0)e^{a_0\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow u(t)e^{a(t)\, x_+^{3/2}} \in L^2(\mathbb{R})$, donde
  $$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{27}{4}\, a_0^2 t}}.$$

Referencias I

Escauriaza, L., Kenig, C., Ponce, G., Vega, L.
On uniqueness properties of solutions of the k-generalized KdV equation.
J. Funct. Anal. 244 (2007), 504-535.

Isaza, P., Linares, F., Ponce, G.
On deacy properties of solutions of the k-generalized Korteweg-de Vries equation.
Communications in Mathematical Physics 234 (2013), 129-146.