Université de Poitiers
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
École Doctorale : **SISMI**
Laboratoire de Mathématiques et Applications

Soutenance de la thèse de doctorat intitulée

Sur l'intégrabilité algébrique des systèmes de Bogoyavlenskij-Itoh déformés à 5 particules

Présentée par : **Carlos Augusto León Gil**
Directeur de thèse : **Pol Vanhaecke**

10 décembre 2020
Poitiers

Plan de travail

1. Introduction
   - La notion d'intégrabilité
   - Le système BI*(5)
2. L'intégrabilité algébrique de BI*(5)
   - L'intégrabilité algébrique de BI(5)
   - Analyse de Kowalevski-Painlevé
   - Déformations spéciales
3. Conclusions et perspectives

Un *système hamiltonien classique* est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

H : Énergie totale du système,

q_i : Positions,

p_i : Impulsions.

Un *système hamiltonien classique* est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

H : Énergie totale du système,

q_i : Positions,

p_i : Impulsions.

La fonction H est (une quantité) conservée au cours du temps.

Un *système hamiltonien classique* est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

H : Énergie totale du système,

q_i : Positions,

p_i : Impulsions.

La fonction H est (une quantité) conservée au cours du temps.

Il peut y avoir d'autres fonctions conservées.

Un *système hamiltonien classique* est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

H : Énergie totale du système,

q_i : Positions,

p_i : Impulsions.

La fonction H est (une quantité) conservée au cours du temps.

Il peut y avoir d'autres fonctions conservées.

Liouville : S'il y en a assez, on peut résoudre le système différentiel par des quadratures.

Un *système hamiltonien classique* est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

H : Énergie totale du système,

q_i : Positions,

p_i : Impulsions.

La fonction H est (une quantité) conservée au cours du temps.

Il peut y avoir d'autres fonctions conservées.

Liouville : S'il y en a assez, on peut résoudre le système différentiel par des quadratures.

Intégrabilité au sens de Liouville !

Exemples :

- Les toupies.
- Le pendule sphérique.
- Le problème à deux corps (Soleil-Terre).

Exemples :

- Les toupies.
- Le pendule sphérique.
- Le problème à deux corps (Soleil-Terre).

Tous les systèmes hamiltoniens sont-ils intégrables ?

Exemples :

- Les toupies.
- Le pendule sphérique.
- Le problème à deux corps (Soleil-Terre).

Tous les systèmes hamiltoniens sont-ils intégrables ?

Poincaré : Le problème de trois corps en interaction gravitationnelle (Soleil-Lune-Terre) n'a pas assez d'intégrales premières analytiques.

Exemples :

- Les toupies.
- Le pendule sphérique.
- Le problème à deux corps (Soleil-Terre).

Tous les systèmes hamiltoniens sont-ils intégrables ?

Poincaré : Le problème de trois corps en interaction gravitationnelle (Soleil-Lune-Terre) n'a pas assez d'intégrales premières analytiques.

Les systèmes hamiltoniens ont été relégués dans l'oubli...

Exemples :

- Les toupies.
- Le pendule sphérique.
- Le problème à deux corps (Soleil-Terre).

Tous les systèmes hamiltoniens sont-ils intégrables ?

Poincaré : Le problème de trois corps en interaction gravitationnelle (Soleil-Lune-Terre) n'a pas assez d'intégrales premières analytiques.

Les systèmes hamiltoniens ont été relégués dans l'oubli...

Découverte : L'équation KdV admet une structure hamiltonienne et un nombre infini de constantes de mouvement.

Exemples :

- Les toupies.
- Le pendule sphérique.
- Le problème à deux corps (Soleil-Terre).

Tous les systèmes hamiltoniens sont-ils intégrables ?

Poincaré : Le problème de trois corps en interaction gravitationnelle (Soleil-Lune-Terre) n'a pas assez d'intégrales premières analytiques.

Les systèmes hamiltoniens ont été relégués dans l'oubli...

Découverte : L'équation KdV admet une structure hamiltonienne et un nombre infini de constantes de mouvement.

Inspirés par les travaux de **Kowalevski** et **Painlevé**, **Adler** et **van Moerbeke** introduisent la notion d'*intégrabilité algébrique*.

Quelques définitions

Quelques définitions

Un *système hamiltonien complexe* est un triplet $(M; \{\cdot\,,\cdot\}\,; H)$, où $(M; \{\cdot\,,\cdot\})$ est une variété de Poisson holomorphe et H est une fonction holomorphe sur M.

Quelques définitions

Un *système hamiltonien complexe* est un triplet $(M; \{\cdot\,,\cdot\}\,; H)$, où $(M; \{\cdot\,,\cdot\})$ est une variété de Poisson holomorphe et H est une fonction holomorphe sur M.

$\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}$ est un champ de vecteurs, appelé *le champ de vecteurs hamiltonien associé à* H.

$\mathcal{F}(M)$: L'algèbre des fonctions holomorphes sur M.

$F, G \in \mathcal{F}(M)$ sont en involution si $\{F, G\} = 0$.

Quelques définitions

Un *système hamiltonien complexe* est un triplet $(M; \{\cdot\,,\cdot\}\,; H)$, où $(M; \{\cdot\,,\cdot\})$ est une variété de Poisson holomorphe et H est une fonction holomorphe sur M.

$\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}$ est un champ de vecteurs, appelé *le champ de vecteurs hamiltonien associé à* H.

$\mathcal{F}(M)$: L'algèbre des fonctions holomorphes sur M.

$F, G \in \mathcal{F}(M)$ sont en involution si $\{F, G\} = 0$.

$(M; \{\cdot\,,\cdot\}\,; \mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_s))$, où M est de dimension n et le rang de $\{\cdot\,,\cdot\}$ est $2r$, est un *système intégrable complexe au sens de Liouville* si

- $\mathbf{H}$ est indépendant ;
- $\mathbf{H}$ est involutif ;
- $s = n - r$.

Pour cette thèse : L'espace des phases M est un espace affine $\mathbb{C}^n$.

Pour cette thèse : L'espace des phases M est un espace affine $\mathbb{C}^n$.

Soit $(M; \{\cdot\,,\cdot\}\,; \mathbf{F})$ un système intégrable complexe (au sens de Liouville), où $\{\cdot\,,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial de rang $2r$ et $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ sont des polynômes. $(M; \{\cdot\,,\cdot\}\,; \mathbf{F})$ est dit *algébriquement intégrable* ou *a.c.i.* si

(1) Pour des valeurs génériques de $\kappa \in \mathbb{C}^s$, la fibre $\mathbf{F}_\kappa$, de l'application moment $m \mapsto (F_1(m), \ldots, F_s(m))$, est isomorphe à une partie affine d'une variété abélienne

$$\mathbf{F}_\kappa \simeq (\mathbb{C}^r/\Lambda_\kappa) \setminus \mathcal{D}_\kappa,$$

où Λ_κ est un réseau dans $\mathbb{C}^r$ est $\mathcal{D}_\kappa$ est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^r/\Lambda_\kappa$;

(2) Les champs intégrables $\mathcal{X}_{F_i}$, restreints à $\mathbf{F}_\kappa$ sont invariants par translation.

Pour cette thèse : L'espace des phases M est un espace affine $\mathbb{C}^n$.

Soit $(M; \{\cdot,\cdot\}; \mathbf{F})$ un système intégrable complexe (au sens de Liouville), où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial de rang $2r$ et $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ sont des polynômes. $(M; \{\cdot,\cdot\}; \mathbf{F})$ est dit *algébriquement intégrable* ou *a.c.i.* si

(1) Pour des valeurs génériques de $\kappa \in \mathbb{C}^s$, la fibre $\mathbf{F}_\kappa$, de l'application moment $m \mapsto (F_1(m), \ldots, F_s(m))$, est isomorphe à une partie affine d'une variété abélienne

$$\mathbf{F}_\kappa \simeq (\mathbb{C}^r/\Lambda_\kappa) \setminus \mathcal{D}_\kappa,$$

où Λ_κ est un réseau dans $\mathbb{C}^r$ est $\mathcal{D}_\kappa$ est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^r/\Lambda_\kappa$;

(2) Les champs intégrables $\mathcal{X}_{F_i}$, restreints à $\mathbf{F}_\kappa$ sont invariants par translation.

Exemple : La toupie d'Euler

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\lambda_3 - \lambda_2)\, yz, \\ \dot{y} &= (\lambda_1 - \lambda_3)\, zx, \\ \dot{z} &= (\lambda_2 - \lambda_1)\, xy. \end{aligned}$$

1. Introduction
   - La notion d'intégrabilité
   - Le système BI*(5)

2. L'intégrabilité algébrique de BI*(5)
   - L'intégrabilité algébrique de BI(5)
   - Analyse de Kowalevski-Painlevé
   - Déformations spéciales

3. Conclusions et perspectives

Le système de Lotka-Volterra s'écrit sous sa forme générale à travers du système d'équations différentielles sur $\mathbb{C}^n$ suivant :

$$\dot{x}_i = \varepsilon_i \, x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \, x_i x_j, \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Le système de Lotka-Volterra s'écrit sous sa forme générale à travers du système d'équations différentielles sur $\mathbb{C}^n$ suivant :

$$\dot{x}_i = \varepsilon_i \, x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \, x_i x_j, \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Le système de Lotka-Volterra à n particules le plus connu est *le système de Kac-van Moerbeke*, que l'on note $\mathrm{KM}(n)$, décrit par le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i(x_{i-1} - x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Le système de Lotka-Volterra s'écrit sous sa forme générale à travers du système d'équations différentielles sur $\mathbb{C}^n$ suivant :

$$\dot{x}_i = \varepsilon_i \, x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \, x_i x_j , \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Le système de Lotka-Volterra à n particules le plus connu est *le système de Kac-van Moerbeke*, que l'on note KM(n), décrit par le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i(x_{i-1} - x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Le système de Bogoyavlenskij-Itoh à n particules, pour $n = 2k+1$ et que l'on note BI(n), est le système de Lotka-Volterra (antisymétrique) défini par la matrice $A = \mathrm{circ}(0, 1 \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. Autrement dit,

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}), \quad i = 1, \ldots, n \, .$$

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

- Crochet de Poisson :
  $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad 1 \le i, j \le n = 2k+1.$
- Hamiltonien : $H_{\mathrm{BI}} := x_1 + \cdots + x_n$.
- Casimir : $C_{\mathrm{BI}} := x_1 \cdots x_n$.

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

- Crochet de Poisson :
  $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n = 2k+1.$
- Hamiltonien : $H_{\mathrm{BI}} := x_1 + \cdots + x_n$.
- Casimir : $C_{\mathrm{BI}} := x_1 \cdots x_n$.

Bogoyavlenskij : Représentation de Lax

$$(X + \lambda M)^{\cdot} = [X + \lambda M, B - \lambda M^{k+1}], \text{ où}$$

$$X_{i,j} := \delta_{i,j+k}\, x_i, \quad M_{i,j} := \delta_{i+1,j}, \quad B_{i,j} := -\delta_{i,j}(x_i + \cdots + x_{i+k}).$$

Ce dernier système admet une formulation hamiltonienne :

- Crochet de Poisson :
  $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}} := A_{i,j}\, x_i x_j, \qquad 1 \leq i, j \leq n = 2k+1.$
- Hamiltonien : $H_{\mathrm{BI}} := x_1 + \cdots + x_n$.
- Casimir : $C_{\mathrm{BI}} := x_1 \cdots x_n$.

Bogoyavlenskij : Représentation de Lax

$$(X + \lambda M)^{\cdot} = [X + \lambda M, B - \lambda M^{k+1}], \text{ où}$$

$$X_{i,j} := \delta_{i,j+k}\, x_i, \quad M_{i,j} := \delta_{i+1,j}, \quad B_{i,j} := -\delta_{i,j}(x_i + \cdots + x_{i+k}).$$

Itoh : $(\mathbb{C}^n, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathrm{BI}}\,, (H_0, \ldots, H_k))$ est un système intégrable au sens de Liouville.

On va s’intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI(n), que l’on notera BI*(n).

On va s'intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI(n), que l'on notera BI$^*(n)$.

Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des paramètres de déformation, tels que $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$. On considère le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

On va s'intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI(n), que l'on notera BI$^*(n)$.

Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des paramètres de déformation, tels que $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$. On considère le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n\,.$$

De même, le système ci-dessus admet une structure hamiltonienne :

- ◇ Soient $\beta_{i,j}$ tels que $\beta_{j,i} = -\beta_{i,j}$ et $\beta_{i,j} = 0$ si $|i-j| \notin \{k, k+1\}$.
- ◇ $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}^*} := A_{i,j}\, x_i\, x_j + \beta_{i,j}, \qquad \varepsilon_i = \beta_{i,i+k} - \beta_{i-k,k},$
- ◇ $H_{\mathrm{BI}^*} = x_1 + \cdots + x_n$.

On va s'intéresser à une famille de *déformations* des systèmes BI(n), que l'on notera BI$^*(n)$.

Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des paramètres de déformation, tels que $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$. On considère le système d'équations différentielles

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{k} (x_{i+j} - x_{i-j}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

De même, le système ci-dessus admet une structure hamiltonienne :

- Soient $\beta_{i,j}$ tels que $\beta_{j,i} = -\beta_{i,j}$ et $\beta_{i,j} = 0$ si $|i-j| \notin \{k, k+1\}$.
- $\{x_i, x_j\}_{\mathrm{BI}^*} := A_{i,j}\, x_i\, x_j + \beta_{i,j}, \qquad \varepsilon_i = \beta_{i,i+k} - \beta_{i-k,k},$
- $H_{\mathrm{BI}^*} = x_1 + \cdots + x_n.$

Evripidou, **Kassotakis** et **Vanhaecke** ont démontré que

$$(\mathbb{C}^n, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathrm{BI}^*}, (H_0, \ldots, H_k))$$

est un système intégrable complexe au sens de Liouville.

Question : Le système $\mathrm{BI}^*(n)$ est-il algébriquement intégrable ?

Question : Le système $\mathrm{BI}^*(n)$ est-il algébriquement intégrable ?

Nous abordons ce problème pour le cas $n = 5$ particules. Le système $\mathrm{BI}^*(5)$ est donné explicitement par le système d'équations différentielles

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(x_2 + x_3 - x_4 - x_5) + \varepsilon_1,\\
\dot{x}_2 &= x_2(x_3 + x_4 - x_5 - x_1) + \varepsilon_2,\\
\dot{x}_3 &= x_3(x_4 + x_5 - x_1 - x_2) + \varepsilon_3,\\
\dot{x}_4 &= x_4(x_5 + x_1 - x_2 - x_3) + \varepsilon_4,\\
\dot{x}_5 &= x_5(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \varepsilon_5.
\end{aligned}
$$

Question : Le système $\mathrm{BI}^*(n)$ est-il algébriquement intégrable ?

Nous abordons ce problème pour le cas $n = 5$ particules. Le système $\mathrm{BI}^*(5)$ est donné explicitement par le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(x_2 + x_3 - x_4 - x_5) + \varepsilon_1,\\
\dot{x}_2 &= x_2(x_3 + x_4 - x_5 - x_1) + \varepsilon_2,\\
\dot{x}_3 &= x_3(x_4 + x_5 - x_1 - x_2) + \varepsilon_3,\\
\dot{x}_4 &= x_4(x_5 + x_1 - x_2 - x_3) + \varepsilon_4,\\
\dot{x}_5 &= x_5(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \varepsilon_5.
\end{aligned}$$

Ce système admet les trois *intégrales premières* suivantes :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5,\\
H_2 &= \sum_{i=1}^{5} x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^{5} (\beta_{i+1,i-2} + \beta_{i+2,i-1})\, x_i,\\
H_3 &= \prod_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} \beta_{i-1,i+1}\, x_{i-2}x_i x_{i+2} + \sum_{i=1}^{5} \beta_{i+1,i-2}\beta_{i+2,i-1}\, x_i.
\end{aligned}$$

Nous considérons d'abord le système non déformé BI(5).

Nous considérons d'abord le système non déformé BI(5).

On montre que ce système est étroitement lié au système KM(5).

Nous considérons d'abord le système non déformé BI(5).

On montre que ce système est étroitement lié au système KM(5).

En effet, on définit l'application $\varphi\colon \mathbb{C}_0^5 \to \mathbb{C}_0^5$ par,

$$\varphi(a) := \left(\frac{1}{a_1\,a_3}, \frac{1}{a_4\,a_1}, \frac{1}{a_2\,a_4}, \frac{1}{a_5\,a_2}, \frac{1}{a_3\,a_5}\right), \qquad a = (a_1, \ldots, a_5) \in \mathbb{C}_0^5,$$

où $\mathbb{C}_0^5 := \mathbb{C}^5 \setminus \{\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{C}^5 \,|\, a_1a_2a_3a_4a_5 = 0\,\}$.

Nous considérons d'abord le système non déformé BI(5).

On montre que ce système est étroitement lié au système KM(5).

En effet, on définit l'application $\varphi\colon \mathbb{C}_0^5 \to \mathbb{C}_0^5$ par,

$$\varphi(a) := \left(\frac{1}{a_1\,a_3}, \frac{1}{a_4\,a_1}, \frac{1}{a_2\,a_4}, \frac{1}{a_5\,a_2}, \frac{1}{a_3\,a_5}\right), \qquad a = (a_1, \ldots, a_5) \in \mathbb{C}_0^5,$$

où $\mathbb{C}_0^5 := \mathbb{C}^5 \setminus \{\, (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{C}^5 \mid a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 0 \,\}$.

On fixe des valeurs compatibles des Casimirs et on considère les espaces

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\kappa_3} &:= \{\, (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{C}^5 \mid a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = \kappa_3 \} \subseteq \mathbb{C}_0^5,\\
\mathcal{M}_{c_3} &:= \{\, (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{C}^5 \mid b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 = c_3 \} \subseteq \mathbb{C}_0^5.
\end{aligned}$$

L'application restreinte $\varphi\colon \mathcal{M}_{\kappa_3} \to \mathcal{M}_{c_3}$ relie les intégrales premières de KM(5) et BI(5) et est un *isomorphisme de Poisson*.

Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{\kappa_3} \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "{(H_1, H_2)}"'] & \mathcal{M}_{c_3} \arrow[d, "{(F_2, F_1)}"] \\
\mathbb{C}^2 \arrow[r, "\sim", "\times \frac{1}{\kappa_3}"'] & \mathbb{C}^2
\end{tikzcd}
$$

Et les champs de vecteurs intégrables sont reliés par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_{H_1} &= \kappa_3\, \psi_* \mathcal{X}_{F_2}, \\
\mathcal{X}_{H_2} &= \kappa_3\, \psi_* \mathcal{X}_{F_1}.
\end{aligned}
$$

Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{\kappa_3} \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "{(H_1, H_2)}"'] & \mathcal{M}_{c_3} \arrow[d, "{(F_2, F_1)}"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\sim", "\times \frac{1}{\kappa_3}"'] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

Et les champs de vecteurs intégrables sont reliés par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{H_1} &= \kappa_3 \, \psi_* \mathcal{X}_{F_2}, \\ \mathcal{X}_{H_2} &= \kappa_3 \, \psi_* \mathcal{X}_{F_1}. \end{aligned}$$

Du fait que KM(5) est algébriquement intégrable, on a un premier résultat :

Plus précisément, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{\kappa_3} \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "{(H_1, H_2)}"'] & \mathcal{M}_{c_3} \arrow[d, "{(F_2, F_1)}"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\sim", "\times \frac{1}{\kappa_3}"'] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

Et les champs de vecteurs intégrables sont reliés par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{H_1} &= \kappa_3 \, \psi_* \mathcal{X}_{F_2} \,, \\ \mathcal{X}_{H_2} &= \kappa_3 \, \psi_* \mathcal{X}_{F_1} \,. \end{aligned}$$

Du fait que KM(5) est algébriquement intégrable, on a un premier résultat :

Théorème I

Le système de Bogoyavlenskij-Itoh à 5 particules, BI(5), est algébriquement intégrable.

Comment prouver l'intégrabilité algébrique de $\mathrm{BI}^*(5)$?

Comment prouver l’intégrabilité algébrique de $\mathrm{BI}^*(5)$?

On doit démontrer que pour une valeur générique $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$,

$$\mathbf{H}_\kappa := \mathbf{H}^{-1}(\{\kappa\}) = \bigcap_{i=1}^{3} \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i(x) = \kappa_i\}$$

est isomorphe à une partie affine d’une surface abélienne $\mathbb{T}^2_\kappa$, et que $\mathcal{X}_{H_1}$, $\mathcal{X}_{H_2}$ sont constants sur ce tore algébrique complexe.

Comment prouver l'intégrabilité algébrique de $\mathrm{BI}^*(5)$?

On doit démontrer que pour une valeur générique $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$,

$$\mathbf{H}_\kappa := \mathbf{H}^{-1}(\{\kappa\}) = \bigcap_{i=1}^{3} \{x \in \mathbb{C}^5 \mid H_i(x) = \kappa_i\}$$

est isomorphe à une partie affine d'une surface abélienne $\mathbb{T}^2_\kappa$, et que $\mathcal{X}_{H_1}$, $\mathcal{X}_{H_2}$ sont constants sur ce tore algébrique complexe.

Nous allons exploiter *l'analyse de Kowalevski-Painlevé*, afin de vérifier certaines conditions du *théorème de Liouville complexe*.

Ce que l'on sait de la fibre générique $\mathbf{H}_\kappa$:

Ce que l'on sait de la fibre générique $\mathbf{H}_\kappa$:

- $\mathbf{H}_\kappa$ n'est pas singulière (*Théorème de Sard*).

Ce que l'on sait de la fibre générique $\mathbf{H}_\kappa$:

- $\mathbf{H}_\kappa$ n'est pas singulière (*Théorème de Sard*).
- $\mathcal{X}_{H_1}$ et $\mathcal{X}_{H_2}$ commutent (puisque H_1 et H_2 sont en involution).

Ce que l'on sait de la fibre générique $\mathbf{H}_\kappa$:

- $\mathbf{H}_\kappa$ n'est pas singulière (*Théorème de Sard*).
- $\mathcal{X}_{H_1}$ et $\mathcal{X}_{H_2}$ commutent (puisque H_1 et H_2 sont en involution).
- $\mathcal{X}_{H_1}$ et $\mathcal{X}_{H_2}$ sont indépendants sur $\mathbf{H}_\kappa$.

On cherche des *solutions de Laurent* de la forme

$$x_i(t) = \frac{1}{t} \sum_{j \geq 0} x_i^{(j)} t^j, \qquad i = 1, \ldots, 5\,,$$

où $x^{(0)} \neq 0$.

On cherche des *solutions de Laurent* de la forme

$$x_i(t) = \frac{1}{t}\sum_{j\geq 0} x_i^{(j)} t^j, \qquad i = 1, \ldots, 5\,,$$

où $x^{(0)} \neq 0$.

On obtient les *équations indicielles*

$$x_i^{(0)}\left(1 + x_{i+1}^{(0)} + x_{i+2}^{(0)} - x_{i-1}^{(0)} - x_{i-2}^{(0)}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, 5\,,$$

dont l'ensemble des solutions non triviales (*le lieu indiciel*) consiste des points

$$\begin{aligned} m_1 &:= (0,0,0,1,-1),\\ m_2 &:= (-1,0,0,1,0),\\ m_3 &:= (-3,1,0,-1,3), \end{aligned}$$

et leurs permutations cycliques des coordonnées (15 points au total).

On trouve cinq familles de *balances principales* et dix autres de *balances inférieures*. Voici une des balances principales :

On trouve cinq familles de *balances principales* et dix autres de *balances inférieures*. Voici une des balances principales :

$$x_1(t;m_1) = a + \left(u_1^{(1)}(\alpha) + p_1^{(1)}(\varepsilon;\alpha)\right)t + \left(u_1^{(2)}(\alpha) + p_1^{(2)}(\varepsilon;\alpha)\right)t^2 + \mathcal{O}\left(t^3\right),$$
$$x_2(t;m_1) = -\varepsilon_2 t + \left(u_2^{(2)}(\alpha) + p_2^{(2)}(\varepsilon;\alpha)\right)t^2 + \mathcal{O}\left(t^3\right),$$
$$x_3(t;m_1) = b + \left(u_3^{(1)}(\alpha) + p_3^{(1)}(\varepsilon;\alpha)\right)t + \left(u_3^{(2)}(\alpha) + p_3^{(2)}(\varepsilon;\alpha)\right)t^2 + \mathcal{O}\left(t^3\right),$$
$$x_4(t;m_1) = \frac{1}{t} + c + \left(u_4^{(1)}(\alpha) + p_4^{(1)}(\varepsilon;\alpha)\right)t + \left(u_4^{(2)}(\alpha) + p_4^{(2)}(\varepsilon;\alpha)\right)t^2 + \mathcal{O}\left(t^3\right),$$
$$x_5(t;m_1) = -\frac{1}{t} + (b + c - a) + \left(u_5^{(1)}(\alpha) + p_5^{(1)}(\varepsilon;\alpha)\right)t + dt^2 + \mathcal{O}\left(t^3\right),$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ est le vecteur des paramètres de déformation et $\alpha = (a, b, c, d)$ est le vecteur des paramètres libres.

Les premiers termes de ces solutions de Laurent nous permettent ensuite d'étudier les *diviseurs de Painlevé abtraits*, qui dans notre cas sont les *courbes affines* définies par les équations $H_i(x(t;\sigma^j m_1)) = \kappa_i$.

Les premiers termes de ces solutions de Laurent nous permettent ensuite d'étudier les *diviseurs de Painlevé abtraits*, qui dans notre cas sont les *courbes affines* définies par les équations $H_i(x(t;\sigma^j m_1)) = \kappa_i$.

Pour m_1, on en obtient la courbe affine $\Gamma_\kappa^{(1)}$ définie par l'équation $F(a,b) = 0$, où

$$\begin{aligned} F(a,b) := {} & a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1\, a^2b^2 + p_{2,1}(\beta,\kappa)\, a^2b + p_{1,2}(\beta,\kappa)\, ab^2 \\ & + p_{1,1}(\beta,\kappa)\, ab + p_{1,0}(\beta,\kappa)\, a + p_{0,1}(\beta,\kappa)\, b + p_{0,0}(\beta,\kappa). \end{aligned}$$

Les premiers termes de ces solutions de Laurent nous permettent ensuite d'étudier les *diviseurs de Painlevé abtraits*, qui dans notre cas sont les *courbes affines* définies par les équations $H_i(x(t; \sigma^j m_1)) = \kappa_i$.

Pour m_1, on en obtient la courbe affine $\Gamma_\kappa^{(1)}$ définie par l'équation $F(a, b) = 0$, où

$$\begin{aligned} F(a,b) := a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1\, a^2b^2 + p_{2,1}(\beta,\kappa)\, a^2b + p_{1,2}(\beta,\kappa)\, ab^2 \\ + p_{1,1}(\beta,\kappa)\, ab + p_{1,0}(\beta,\kappa)\, a + p_{0,1}(\beta,\kappa)\, b + p_{0,0}(\beta,\kappa). \end{aligned}$$

Pour tout β et pour κ générique, $\Gamma_\kappa^{(1)}$ est une courbe lisse de genre 2.

Les premiers termes de ces solutions de Laurent nous permettent ensuite d'étudier les *diviseurs de Painlevé abtraits*, qui dans notre cas sont les *courbes affines* définies par les équations $H_i(x(t;\sigma^j m_1)) = \kappa_i$.

Pour m_1, on en obtient la courbe affine $\Gamma_\kappa^{(1)}$ définie par l'équation $F(a,b) = 0$, où

$$
\begin{aligned}
F(a,b) := a^3b^2 + a^2b^3 - \kappa_1\, a^2b^2 + p_{2,1}(\beta,\kappa)\, a^2b + p_{1,2}(\beta,\kappa)\, ab^2 \\
+ p_{1,1}(\beta,\kappa)\, ab + p_{1,0}(\beta,\kappa)\, a + p_{0,1}(\beta,\kappa)\, b + p_{0,0}(\beta,\kappa).
\end{aligned}
$$

Pour tout β et pour κ générique, $\Gamma_\kappa^{(1)}$ est une courbe lisse de genre 2.

Si BI*(5) est a.c.i., $\Gamma_\kappa^{(1)}$ est une des courbes à ajouter à $\mathbf{H}_\kappa$ pour la compléter en une surface abélienne !

On construit les 25 fonctions polynomiales homogènes suivantes :

On construit les 25 fonctions polynomiales homogènes suivantes :

$$
\begin{aligned}
&z_0 := 1, && \\
&z_i := x_i, && i = 1, \dots, 4, \\
&z_{4+i} := x_i x_{i+2}, && i = 1, \dots, 5, \\
&z_{9+i} := x_{i-2} x_i x_{i+2}, && i = 1, \dots, 4, \\
&z_{13+i} := x_{i-2} x_i^2 x_{i+2}, && i = 1, \dots, 5, \\
&z_{19} := x_4 x_3 \left(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \varepsilon_1 \right), && \\
&z_{19+i} := x_{i-2} x_i^3 x_{i+2} + x_i^2 \left(\varepsilon_{i-2} x_{i+2} - \varepsilon_{i+2} x_{i-2} \right), && i = 1, \dots, 5.
\end{aligned}
$$

On construit les 25 fonctions polynomiales homogènes suivantes :

$$
\begin{aligned}
z_0 &:= 1, \\
z_i &:= x_i, && i = 1, \ldots, 4, \\
z_{4+i} &:= x_i x_{i+2}, && i = 1, \ldots, 5, \\
z_{9+i} &:= x_{i-2} x_i x_{i+2}, && i = 1, \ldots, 4, \\
z_{13+i} &:= x_{i-2} x_i^2 x_{i+2}, && i = 1, \ldots, 5, \\
z_{19} &:= x_4 x_3 \left(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \varepsilon_1 \right), \\
z_{19+i} &:= x_{i-2} x_i^3 x_{i+2} + x_i^2 \left(\varepsilon_{i-2} x_{i+2} - \varepsilon_{i+2} x_{i-2} \right), && i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

Ces fonctions indépendantes ont la propriété d'avoir *au plus un pôle simple* lorque l'on y substitue n'importe quelle balance principale.

On construit les 25 fonctions polynomiales homogènes suivantes :

$$
\begin{aligned}
z_0 &:= 1, && \\
z_i &:= x_i, && i = 1, \ldots, 4, \\
z_{4+i} &:= x_i x_{i+2}, && i = 1, \ldots, 5, \\
z_{9+i} &:= x_{i-2} x_i x_{i+2}, && i = 1, \ldots, 4, \\
z_{13+i} &:= x_{i-2} x_i^2 x_{i+2}, && i = 1, \ldots, 5, \\
z_{19} &:= x_4 x_3 \left(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \varepsilon_1\right), && \\
z_{19+i} &:= x_{i-2} x_i^3 x_{i+2} + x_i^2 \left(\varepsilon_{i-2} x_{i+2} - \varepsilon_{i+2} x_{i-2}\right), && i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

Ces fonctions indépendantes ont la propriété d'avoir *au plus un pôle simple* lorque l'on y substitue n'importe quelle balance principale.

Pour continuer l'analyse, il est important d'étendre $\mathcal{X}_{H_1}$ de manière holomorphe à tout $\mathbb{P}^{24}$.
Pour ce faire, on montre que les équations différentielles de $\mathcal{X}_{H_1}$ s'écrivent comme des *polynômes quadratiques* sur les coordonnées z_i/z_j.

Ces polynômes nous permettent de plonger $\mathbf{H}_\kappa$ dans $\mathbb{P}^{24}$, via l'application $x \mapsto \varphi_\kappa(x) := (z_0(x) : z_1(x) : \cdots : z_{24}(x))$.

Ces polynômes nous permettent de plonger $\mathbf{H}_\kappa$ dans $\mathbb{P}^{24}$, via l'application $x \mapsto \varphi_\kappa(x) := (z_0(x) : z_1(x) : \cdots : z_{24}(x))$.

Notons $\Gamma_\kappa^{(i)}$ la courbe de Painlevé abstraite correspondante à $m_1^{(i)}$. On a alors cinq applications *régulières injectives* $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{24}$:

$$\varphi_\kappa^{(i)} \ : \ (a,b) \mapsto \left(\operatorname{Res} z_0(x(t; m_1^{(i)})) \ : \ \cdots \ : \ \operatorname{Res} z_{24}(x(t; m_1^{(i)}))\right).$$

Ces polynômes nous permettent de plonger $\mathbf{H}_\kappa$ dans $\mathbb{P}^{24}$, via l'application $x \mapsto \varphi_\kappa(x) := (z_0(x) : z_1(x) : \cdots : z_{24}(x))$.

Notons $\Gamma_\kappa^{(i)}$ la courbe de Painlevé abstraite correspondante à $m_1^{(i)}$. On a alors cinq applications *régulières injectives* $\varphi_\kappa^{(i)} : \Gamma_\kappa^{(i)} \hookrightarrow \mathbb{P}^{24}$:

$$\varphi_\kappa^{(i)} \ : \ (a,b) \mapsto \left(\operatorname{Res} z_0(x(t;m_1^{(i)})) \ : \ \cdots \ : \ \operatorname{Res} z_{24}(x(t;m_1^{(i)}))\right).$$

On complète $\Gamma_\kappa^{(i)}$ en y ajoutant ses *points à l'infini*.

Autour des points à l'infini, la courbe $\Gamma_{\kappa}^{(1)}$ est paramétrée comme suit :

Autour des points à l'infini, la courbe $\Gamma_\kappa^{(1)}$ est paramétrée comme suit :

$$\begin{aligned}
\infty\ &: \quad a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\zeta + \mathcal{O}\left(\zeta^2\right),\\
\infty_{\varepsilon,-}\ &: \quad a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = (\varepsilon_3 + \varepsilon_5)\,\zeta - \frac{1}{\varepsilon_5}\,p_{0,0}(\beta_{5,2},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),\\
\infty'_{\varepsilon,-}\ &: \quad a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \varepsilon_3\,\zeta + \frac{1}{\varepsilon_5}\,p_{0,0}(\beta_{3,5},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),\\
\infty_{\varepsilon,+}\ &: \quad b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -(\varepsilon_4 + \varepsilon_1)\,\zeta - \frac{1}{\varepsilon_4}\,p_{0,0}(\beta_{2,4},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),\\
\infty'_{\varepsilon,+}\ &: \quad b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\varepsilon_1\,\zeta + \frac{1}{\varepsilon_4}\,p_{0,0}(\beta_{4,1},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right).
\end{aligned}$$

Autour des points à l'infini, la courbe $\Gamma_\kappa^{(1)}$ est paramétrée comme suit :

$$\begin{aligned}
\infty \;: \quad & a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\zeta + \mathcal{O}\left(\zeta^2\right),\\
\infty_{\varepsilon,-} \;: \quad & a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = (\varepsilon_3 + \varepsilon_5)\,\zeta - \frac{1}{\varepsilon_5}\,p_{0,0}(\beta_{5,2},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),\\
\infty_{\varepsilon,-}' \;: \quad & a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \varepsilon_3\,\zeta + \frac{1}{\varepsilon_5}\,p_{0,0}(\beta_{3,5},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),\\
\infty_{\varepsilon,+} \;: \quad & b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -(\varepsilon_4 + \varepsilon_1)\,\zeta - \frac{1}{\varepsilon_4}\,p_{0,0}(\beta_{2,4},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),\\
\infty_{\varepsilon,+}' \;: \quad & b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\varepsilon_1\,\zeta + \frac{1}{\varepsilon_4}\,p_{0,0}(\beta_{4,1},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right).
\end{aligned}$$

À ce stade, on doit imposer que $\varepsilon_i \neq 0$, pour $i = 1, \ldots, 5$.

Autour des points à l'infini, la courbe $\Gamma_\kappa^{(1)}$ est paramétrée comme suit :

$$\infty : \quad a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = -\frac{1}{\zeta} + \kappa_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\zeta + \mathcal{O}\left(\zeta^2\right),$$

$$\infty_{\varepsilon,-} : \quad a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = (\varepsilon_3 + \varepsilon_5)\,\zeta - \frac{1}{\varepsilon_5}\,p_{0,0}(\beta_{5,2},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),$$

$$\infty'_{\varepsilon,-} : \quad a = \frac{1}{\zeta}, \quad b = \varepsilon_3\,\zeta + \frac{1}{\varepsilon_5}\,p_{0,0}(\beta_{3,5},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),$$

$$\infty_{\varepsilon,+} : \quad b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -(\varepsilon_4 + \varepsilon_1)\,\zeta - \frac{1}{\varepsilon_4}\,p_{0,0}(\beta_{2,4},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right),$$

$$\infty'_{\varepsilon,+} : \quad b = \frac{1}{\zeta}, \quad a = -\varepsilon_1\,\zeta + \frac{1}{\varepsilon_4}\,p_{0,0}(\beta_{4,1},\kappa)\,\zeta^2 + \mathcal{O}\left(\zeta^3\right).$$

À ce stade, on doit imposer que $\varepsilon_i \neq 0$, pour $i = 1, \ldots, 5$.

On notera

$$\mathcal{D}_\kappa^{(i)} := \overline{\varphi_\kappa^{(i)}\left(\Gamma_\kappa^{(i)}\right)},$$

$$P_i = \varphi_\kappa^{(i)}\left(\infty^{(i)}\right) \quad \text{et} \quad Q_i = \varphi_\kappa^{(i+2)}\left(\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i+2)}\right) = \varphi_\kappa^{(i-2)}\left(\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i-2)}\right).$$

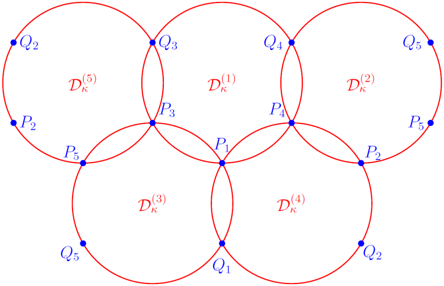
Dans le cas *complètement déformé*, on obtient la configuration suivante pour le diviseur de Painlevé :

Dans le cas *complètement déformé*, on obtient la configuration suivante pour le diviseur de Painlevé :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4	Q_5	Q_1	Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	Q_5	Q_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2

Dans le cas *complètement déformé*, on obtient la configuration suivante pour le diviseur de Painlevé :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4	Q_5	Q_1	Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	Q_5	Q_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2



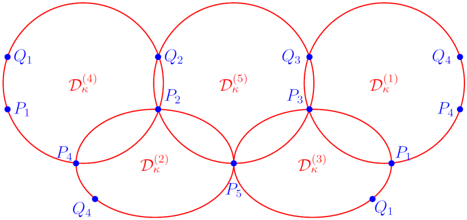
Un des ε_i est nul, $(0, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$:

Un des ε_i est nul, $(0, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$:

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4		Q_1	Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	P_5	Q_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4		P_1	P_2

Un des ε_i est nul, $(0, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$:

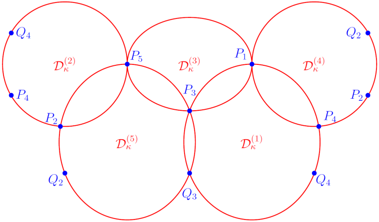
	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4		Q_1	Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	P_5	Q_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4		P_1	P_2



Deux ε_i sont nuls et consécutifs, $(0, 0, \cdot, \cdot, \cdot)$:

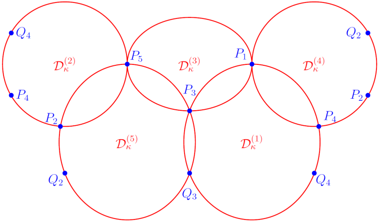
Deux ε_i sont nuls et consécutifs, $(0, 0, \cdot, \cdot, \cdot)$:

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4			Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	P_5	P_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4			P_2



Deux ε_i sont nuls et consécutifs, $(0,0,\cdot,\cdot,\cdot)$:

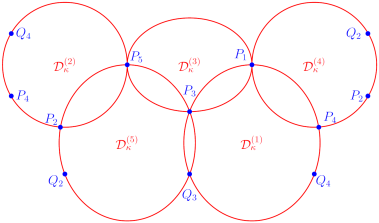
	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4			Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	P_5	P_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4			P_2



Deux ε_i sont nuls et non consécutifs, $(0,\cdot,0,\cdot,\cdot)$:

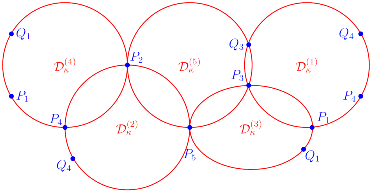
Deux ε_i sont nuls et consécutifs, $(0,0,\cdot,\cdot,\cdot)$:

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4			Q_2	Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	P_5	P_1	Q_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4			P_2



Deux ε_i sont nuls et non consécutifs, $(0,\cdot,0,\cdot,\cdot)$:

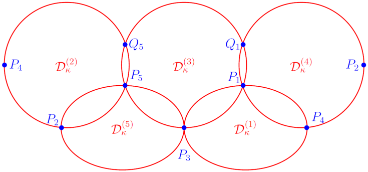
	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	Q_4		Q_1		Q_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$	Q_3	Q_4	P_5	Q_1	P_2
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4		P_1	



Deux ε_i non nuls et consécutifs, $(\cdot, \cdot, 0, 0, 0)$:

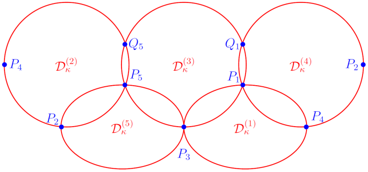
Deux ε_i non nuls et consécutifs, $(\cdot, \cdot, 0, 0, 0)$:

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$ $\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_1	P_2	P_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$ $\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	Q_5 P_5	Q_1 P_1	P_2



Deux ε_i non nuls et consécutifs, $(\cdot,\cdot,0,0,0)$:

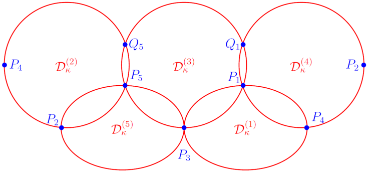
	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$ $\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_1	P_2	P_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$ $\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	Q_5 P_5	Q_1 P_1	P_2



Deux ε_i non nuls et non consécutifs, $(\cdot,0,\cdot,0,0)$:

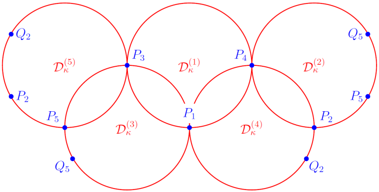
Deux ε_i non nuls et consécutifs, $(\cdot, \cdot, 0, 0, 0)$:

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$ $\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	P_4	P_5 Q_5	P_1 Q_1	P_2	P_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$ $\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	Q_5 P_5	Q_1 P_1	P_2



Deux ε_i non nuls et non consécutifs, $(\cdot, 0, \cdot, 0, 0)$:

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$ $\infty_{\varepsilon,-}^{\prime,(i)}$	P_4	P_5 Q_5	P_1	P_2 Q_2	P_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{\prime,(i)}$ $\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	Q_5 P_5	P_1	Q_2 P_2



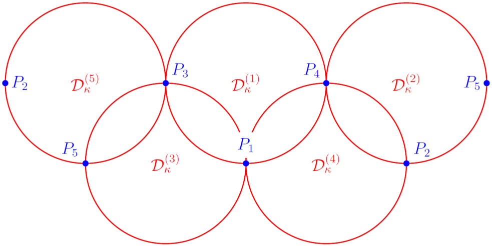
Tous les ε_i sont nuls, $(0, 0, 0, 0, 0)$. On est dans le cas non déformé, BI(5). On obtient :

Tous les ε_i sont nuls, $(0,0,0,0,0)$. On est dans le cas non déformé, BI(5). On obtient :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2

Tous les ε_i sont nuls, $(0,0,0,0,0)$. On est dans le cas non déformé, BI(5). On obtient :

	$\mathcal{D}_k^{(1)}$	$\mathcal{D}_k^{(2)}$	$\mathcal{D}_k^{(3)}$	$\mathcal{D}_k^{(4)}$	$\mathcal{D}_k^{(5)}$
$\infty_{\varepsilon,-}^{(i)}$	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
$\infty^{(i)}$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$\infty_{\varepsilon,+}^{(i)}$	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2



Ainsi, on vérifie les conditions d'une *version complexe du Théorème de Liouville*, qui nous permet enfin de démontrer le résultat suivant :

Ainsi, on vérifie les conditions d'une *version complexe du Théorème de Liouville*, qui nous permet enfin de démontrer le résultat suivant :

Théorème II

Pour toutes les valeurs des paramètres de déformation, le système $BI^*(5)$ *est algébriquement intégrable.*

Pour κ *générique, la fibre* $\mathbf{H}_\kappa$ *de l'application moment est isomorphe à une partie affine de la jacobienne de la courbe algébrique* $\overline{\Gamma}_\kappa^{(i)}$.

Conclusions

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).
- On a démontré l'intégrabilité algébrique de BI*(5).

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).
- On a démontré l'intégrabilité algébrique de BI*(5).

Perspectives

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).
- On a démontré l'intégrabilité algébrique de $\mathrm{BI}^*(5)$.

Perspectives

- Pour n arbitraire, le système $\mathrm{BI}^*(n)$ est-il a.c.i. ?

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).
- On a démontré l'intégrabilité algébrique de $BI^*(5)$.

Perspectives

- Pour n arbitraire, le système $BI^*(n)$ est-il a.c.i. ?
- L'étude des *fibres non génériques* de $BI^*(n)$.

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).
- On a démontré l'intégrabilité algébrique de $\mathrm{BI}^*(5)$.

Perspectives

- Pour n arbitraire, le système $\mathrm{BI}^*(n)$ est-il a.c.i. ?
- L'étude des *fibres non génériques* de $\mathrm{BI}^*(n)$.
- Les *discrétisations intégrables* de $\mathrm{BI}^*(n)$.

Conclusions

- Rapport entre KM(5) et BI(5).
- On a démontré l'intégrabilité algébrique de $\mathrm{BI}^*(5)$.

Perspectives

- Pour n arbitraire, le système $\mathrm{BI}^*(n)$ est-il a.c.i. ?
- L'étude des *fibres non génériques* de $\mathrm{BI}^*(n)$.
- Les *discrétisations intégrables* de $\mathrm{BI}^*(n)$.
- Le système $\mathrm{BI}^*(5)$ peut-il être obtenu par réduction à partir d'un système intégrable du *type Toda* ?

Merci pour votre attention !

Théorème de Liouville complexe

Soit $A \subset \mathbb{C}^n$ *une variété affine non singulière de dimension* r*, munie de* r *champs de vecteurs holomorphes* $X_1, \ldots, X_r$ *et soit* $\varphi \colon A \to \mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}^N$ *un morphisme. Soit* $\Delta := \overline{\varphi(A)} \setminus \varphi(A)$*, que l'on décompose* $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$*, où* Δ' *est la réunion des composantes irréductibles de* Δ *de dimension* $r-1$ *et* Δ'' *la réunion des autres composantes irréductibles de* Δ*. On suppose :*

(0) $\varphi : A \to \mathbb{C}^N$ *est un plongement ;*

(1) *Les champs commutent deux à deux,* $[X_i, X_j] = 0$ *pour* $1 \leqslant i, j \leqslant r$ *;*

(2) *En chaque point* $m \in A$ *les champs de vecteurs* $X_1, \ldots, X_r$ *sont indépendants ;*

(3) *Le champ de vecteurs* $\varphi_* X_1$ *se prolonge en un champ de vecteurs* $\overline{X_1}$ *qui est holomorphe au voisinage de* Δ' *dans* $\mathbb{P}^N$ *;*

(4) *Les courbes intégrales de* $\overline{X_1}$ *qui débutent en des points de* Δ' *partent tout de suite dans* $\varphi(A)$*.*

Alors $\overline{\varphi(A)}$ *est une variété abélienne de dimension* r *et* $\Delta'' = \emptyset$*, de sorte que* $\overline{\varphi(A)} = \varphi(A) \cup \Delta'$*. De plus, les champs de vecteurs holomorphes* $\varphi_* X_1, \ldots, \varphi_* X_r$ *se prolongent en des champs de vecteurs holomorphes sur tout* $\overline{\varphi(A)}$*.*