RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO:
CUANTIZACIÓN DE PLANCK

1. Mecánica Estadística

Empezamos esta discusión exponiendo algunas nociones termodinámicas clásicas.

Un **microestado** es la especificación detallada de una configuración microscópica de un sistema termodinámico (un punto del espacio de fase de dicho sistema).

Un **macroestado** se refiere a una caracterización del sistema termodinámico mediante los valores de un número finito n de variables de estado (de las cuales al menos una es *extensiva*). Un macroestado viene dado por una distribución de probabilidad sobre un conjunto dado de microestados.

Por ejemplo, en un gas ideal, un microestado consiste de especificar las posiciones ($\vec{r_i}$) y los momentos lineales ($\vec{p_i}$) de cada partícula, y un macroestado consiste en definir tres de las cantidades P, V, T y N, teniendo en cuenta la *Ley de Boyle-Mariotte*:

$$\frac{P\,V}{T} = N\,R,$$

donde $R = 8,314$ J/K mol es la constante de los gases ideales, N es el número de partículas o moléculas en el gas y P, V y T son la presión, el volumen y la temperatura del gas, respectivamente.

A continuación nos proponemos deducir la ley de distribución de Boltzmann.

Consideremos un sistema de dos partículas y tres posibles valores de energía: E_1, E_2 y E_3. Denotemos por n_1, n_2 y n_3 el número de partículas en el nivel de energía E_1, E_2 y E_3, respectivamente. En esta situación, $n_1 + n_2 + n_3 = 2$ y tenemos las siguientes posibilidades:

n_1	n_2	n_3
2	0	0
1	1	0
1	0	1
0	2	0
0	1	1
0	0	2

Denotemos por $[E_i, E_j]$ al microestado que indica que la partícula 1 se encuentra con energía E_i y que la partícula 2 se encuentra con energía E_j. Esta información se resume en la siguiente tabla:

Macroestados	**Microestados**
(2,0,0)	$[E_1, E_1]$
(1,1,0)	$[E_1, E_2]$, $[E_2, E_1]$
(1,0,1)	$[E_1, E_3]$, $[E_3, E_1]$
(0,2,0)	$[E_2, E_2]$
(0,1,1)	$[E_2, E_3]$, $[E_3, E_2]$
(0,0,2)	$[E_3, E_3]$

Para nuestro experimento es suficiente especificar la cantidad de microestados y no es necesario detallar cada uno de ellos. Sea $\Omega(n_1, n_2, n_3)$ el número de microestados correspondientes al macroestado (n_1, n_2, n_3). Un conteo sencillo muestra que

$$\Omega(n_1, n_2, n_3) = \binom{2}{n_1}\binom{2-n_1}{n_2}\binom{2-n_1-n_2}{n_3} = \frac{2!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}.$$

Es fácil generalizar el experimento anterior para un sistema de N partículas ($N \gg 0$), con energía total E y posibles valores de la misma: $E_1, \ldots, E_l$. Luego,

$$\Omega(n_1, \ldots, n_l) = \frac{N!}{n_1! \cdots n_l!},$$

donde $n_1, \ldots, n_k$ son naturales de modo que

$$N = \sum_{j=1}^{l} n_j \ \text{ y } \ E = \sum_{j=1}^{l} n_j E_j. \tag{1.1}$$

El macroestado (distribución) con la mayor cantidad de microestados será la distribución más probable.

Así que buscamos maximizar Ω sujeta a las restricciones 1.1. Esto equivale a maximizar la función $\ln \Omega$ sujeta a 1.1. Para ello usamos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla \ln(\Omega) = \alpha \nabla N + \beta \nabla E, \\ N = \displaystyle\sum_{j=1}^{l} n_j, \qquad E = \sum_{j=1}^{l} n_j E_j \end{cases} \tag{1.2}$$

Por simplicidad en los cálculos, usamos también la aproximación de Stirling:

Si $x \gg 0$, entonces $\ln(x!) \approx x \ln(x) - x$.

Tenemos que $\dfrac{\partial N}{\partial n_j} = 1$, $\dfrac{\partial E}{\partial n_j} = E_j$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\Omega)}{\partial n_j} &= \frac{\partial}{\partial n_j}\left[\ln(N!) - \sum_{j=1}^{l} \ln(n_j!)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial N}\left[N \ln(N) - N\right] \frac{\partial N}{\partial n_j} - \frac{\partial}{\partial n_j}\left[n_j \ln(n_j) - n_j\right] \\ &= \ln(N) - \ln(n_j). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior, la j-ésima componente de la primera ecuación en 1.2 es:

$$\begin{aligned}
&\ln(N) - \ln(n_j) = \alpha + \beta E_j \\
&\Rightarrow \frac{n_j}{N} = e^{-\alpha} e^{-\beta E_j}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \frac{n_j}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l} n_j = 1.$

De esta manera podemos interpretar la cantidad $\dfrac{n_j}{N}$ como la probabilidad de encontrar alguna partícula en el nivel de energía E_j. Denotemos esta densidad de probabilidad por

$$\mathcal{P}(E_j) = A\, e^{-\beta E_j}.$$

Llevando esto último al caso continuo obtenemos que

$$\mathcal{P}(E) = A\, e^{-\beta E}, \qquad E \geq 0,$$

donde $A, B > 0$ y A se toma de modo que $\displaystyle\int_0^\infty \mathcal{P}(E)\, dE = 1$. Esto es,

$$\mathcal{P}(E) = \beta\, e^{-\beta E}.$$

Por consideraciones termodinámicas, si S denota la entropía del sistema y T la temperatura absoluta, entonces

$$S = k_B \ln(\Omega) \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial E},$$

donde $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
S &= k_B \left[\ln(N!) - \ln(n_j!)\right] \\
&= k_B \left[N\ln(N) - N - \sum_{j=1}^{l} \left(n_j \ln(n_j) - n_j\right) \right] \\
&= k_B \left[N\ln(N) - \sum_{j=1}^{l} n_j \ln(n_j) \right] \\
&= k_B \left[N\ln(N) - \sum_{j=1}^{l} n_j \left(\ln(N) - \alpha - \beta E_j\right) \right] \\
&= k_B \left[\alpha N + \beta E\right],
\end{aligned}$$

de donde $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\partial S}{\partial E} = k_B\, \beta$, o sea $\beta = \dfrac{1}{k_B\, T}$. Concluimos que

$$\mathcal{P}(E) = \frac{1}{k_B\, T}\, e^{-E/k_B T}, \quad E \geq 0. \tag{1.3}$$

Esta densidad de probabilidad se conoce como la *distribución de Boltzmann.*

La energía promedio de un sistema termodinámico para el cual la energía E se distribuye obedeciendo 1.3 es:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^\infty E\,\mathcal{P}(E)\,dE = \int_0^\infty \frac{E}{k_B T}\, e^{-E/k_B T}\, dE \\ &= k_B T \int_0^\infty r\, e^{-r}\, dr = k_B T \lim_{r\to\infty} \left[1 - (1+r)e^{-r}\right] \\ &= k_B T. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Siguiendo el modelo de la distribución de Boltzmann, se puede establecer un resultado central en la Termodinámica clásica.

> **Ley de la equipartición de la energía:** En el equilibrio térmico, la energía promedio se reparte en partes iguales entre sus varias formas. Esto es, a partir del Hamiltoniano de un sistema, cada grado de libertad contribuye en $\frac{1}{2}\, k_B T$ a la energía promedio del sistema. Escrita de otro modo:
>
> $$\left\langle x_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} k_B T.$$

Justificación:

Para un sistema termodinámico que se encuentra en equilibrio térmico a una temperatura T, en el cual el conjunto de los posibles estados del sistema (conjunto de partículas) que intercambia energía térmica con los alrededores, pero no materia (esto se conoce como *colectividad canónica*), la distribución de cada estado en el espacio de fase está dada por

$$\mathcal{P} = A\, e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

o sea que

$$A \int_\Gamma e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)}\, d\Gamma = 1,$$

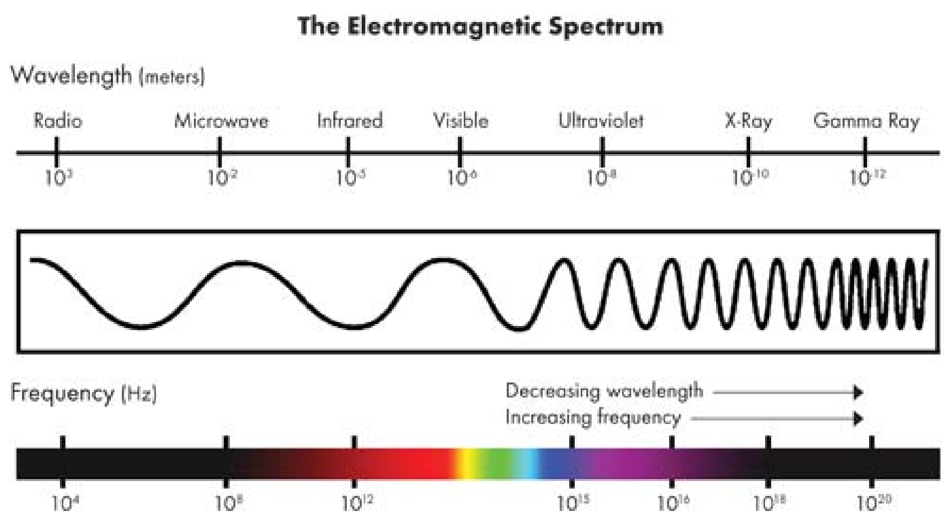
donde Γ es el espacio de fase y A es una constante de normalización.
Un proceso de integración por partes para una variable del espacio de fase x_k (que puede ser p_k o q_k) entre dos límites a y b resulta:

$$\begin{aligned} & A \int \underbrace{\left[x_k\, e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)} \big|_{x_k=a}^{x_k=b} \right]}_{0} \underbrace{d\Gamma_k}_{d\Gamma \backslash dx_k} + A \int e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)} x_k \beta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}\, d\Gamma = 1 \\ & \Rightarrow \left\langle x_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \right\rangle = A \int x_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}\, e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)}\, d\Gamma = \frac{1}{\beta} = k_B T. \end{aligned}$$

2. Radiación Térmica

A la radiación emitida por un cuerpo como resultado de su temperatura se le llama **radiación térmica**. Todos los cuerpos tienen la capacidad de emitir tal radiación en su derrededor y absoberla de sus inmediaciones.
La experiencia permite establecer las siguientes observaciones: si eleváramos uniformemente la temperatura de un cuerpo caliente observaríamos principalmente dos efectos.

(1) Cuanto más alta es la temperatura, mayor es la radiación emitida: al principio el cuerpo parece opaco; luego brilla intensamente.
(2) Entre más alta es la temperatura, mayor es la frecuencia de la parte del espectro que radia más intensamente: el color predominante del cuerpo caliente cambia de *rojo vivo* a *rojo blanco* a *azul*.



Vamos a caracterizar la intensidad de la radiación térmica por la magnitud del flujo de energía (medido en Watts). Este flujo de energía por unidad de área para un cuerpo radiante se llama **radiancia** o **emisión radiante** del cuerpo. A esta cantidad la denotaremos por $\mathcal{R}_T$ (se mide en Watts/m^2).

La radiación consiste de *ondas electromagnéticas* con diferentes frecuencias ν.

Definimos la **emisividad** del cuerpo, que depende de la temperatura T y la frecuencia ν, como la razón de cambio de la radiancia con respecto a la frecuencia:

$$r_T(\nu) = \frac{d}{d\nu}\mathcal{R}_T(\nu).$$

Así que, en virtud del teorema fundamental del cálculo,

$$\mathcal{R}_T = \int_0^\infty \frac{d}{d\nu}\mathcal{R}_T(\nu)\, d\nu = \int_0^\infty r_T(\nu)\, d\nu.$$

Sea $\Delta\Phi_\nu$ el flujo de energía radiante, debido a ondas electromagnéticas, con frecuencias entre ν y $\nu + \Delta\nu$, a través de una porción de la superficie del cuerpo. Sea $\Delta\Phi'_\nu$ la parte de este flujo que es absorbido por el cuerpo. Definimos la **absorción** de éste como la razón entre los dos flujos mencionados:

$$a_T(\nu) = \frac{\Delta\Phi'_\nu}{\Delta\Phi_\nu}.$$

Notemos que, a partir de la definición, $a_T(\nu) \leq 1$.

Un **cuerpo negro** es aquel para el cual $a_T \equiv 1$. Este tipo de cuerpos emiten radiación térmica con el mismo espectro a una temperatura dada, independientemente de los detalles de su composición.

Es posible relacionar la emisividad y absorción de un cuerpo radiante, a una temperatura dada T. Esta relación se conoce como la *Ley de Kirchhoff*, en honor al físico alemán Gustav Kirchhoff (1824-1887):

> **Ley de Kirchhoff (1859):** La razón entre la emisividad y la absorción de un cuerpo radiante no depende de la naturaleza del mismo, sino que es una función universal de la temperatura y la frecuencia para todos los cuerpos.
>
> $$\frac{r_T(\nu)}{a_T(\nu)} = f_T(\nu),$$
>
> donde f_T es la función universal de Kirchhoff.

Para un cuerpo negro tenemos entonces que $r_T(\nu) = f_T(\nu)$, o sea que $f_T(\nu)$ es la emisividad de un cuerpo negro.

Experimentalmente se pudo conocer que el perfil de la función f_T es como lo muestra la siguiente figura:

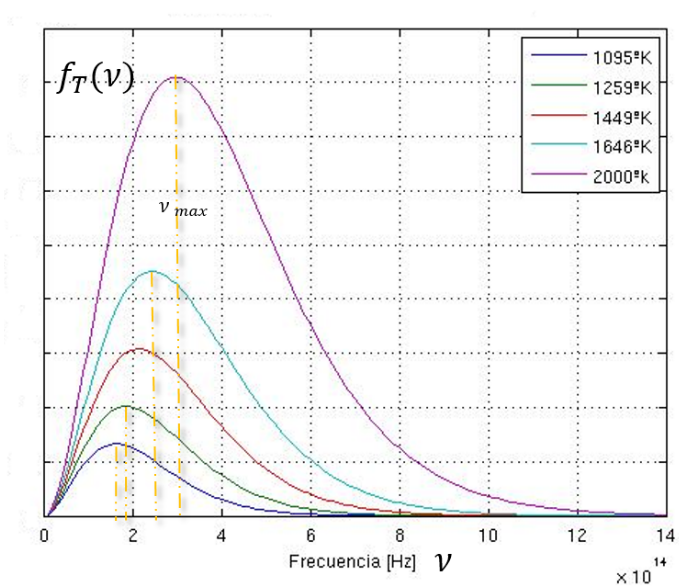


FIGURE 1. Distribución de la radiación de un cuerpo negro

Supondremos la radiación en el equilibrio térmico, así que nos imaginamos una cavidad con un pequeño orificio, a temperatura constante T.

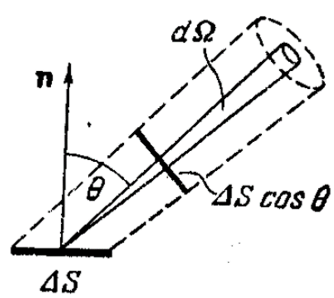
En el equilibrio, la energía radiada se distribuirá en la cavidad con una densidad de energía (por unidad de volumen) bien definida, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_T$. A partir de consideraciones termodinámicas se sabe que $\mathcal{U}$ depende sólo de la temperatura T y no de las propiedades de las paredes de la cavidad.
Denotemos por u_T a la variación de $\mathcal{U}_T$ respecto a la frecuencia ν, es decir,

$$u_T(\nu) = \frac{d}{d\nu}\mathcal{U}_T(\nu);$$

así que, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\mathcal{U}_T = \int_0^\infty u_T(\nu)\, d\nu.$$

Veamos a continuación la relación que existe entre $f_T(\nu)$ y la densidad de energía por unidad de frecuencia, $u_T(\nu)$:



La densidad de flujo de energía en un punto es igual al producto de la densidad de energía por unidad de frecuencia, $u_T(\nu)$, y la velocidad de una onda electromagnética, c. Pero una multitud de rayos se distribuirán uniformemente en los límites de un ángulo sólido 4π. De este modo, obtenemos la densidad de corriente del flujo de energía en un ángulo sólido $\Delta\Omega$:

$$\Delta \mathrm{j} = \frac{c\,\mathcal{U}_T}{4\pi}\,\Delta\Omega,$$

donde $c = 299\,792\,458$ m/s es la velocidad de la luz.

Para un elemento de área ΔS en la cavidad, el flujo de energía emitido en él ángulo sólido $\Delta\Omega = \sin(\varphi)\,\Delta\varphi\,\Delta\theta$, donde φ es el ángulo que forman el vector normal de la porción de superficie, $\vec{n}$, y la dirección en que se emite dicho flujo, es:

$$\Phi = \Delta \mathrm{j}\,\Delta S\,\cos(\varphi) = \frac{c\,\mathcal{U}_T}{4\pi}\,\Delta S\,\cos(\varphi)\sin(\varphi)\Delta\varphi\,\Delta\theta.$$

Por lo tanto, la porción de área ΔS emite un flujo de energía

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \delta\Phi_{em} = \frac{c\mathcal{U}_T}{4\pi}\,\Delta S \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi\,d\theta \\ &= \frac{c}{4}\mathcal{U}_T\,\Delta S,\end{aligned}$$

en todas las direcciones dentro de los confines de un ángulo sólido de 2π.
De otra parte, este flujo se puede obtener al multiplicar la radiancia y ΔS: $\Phi = \mathcal{R}_T\,\Delta S$, por lo cual

$$\mathcal{R}_T = \frac{c}{4}\mathcal{U}_T.$$

Esta última ecuación es válida para todas las componentes espectrales de la radiación. Por lo tanto,

$$f_T(\nu) = \frac{c}{4}\,u_T(\nu).$$

Antecedentes

◇ (1879: Stefan, 1884: Boltzmann) Para un cuerpo negro,

$$\mathcal{R}_T = \sigma T^4,$$

donde $\sigma = 5,668 \times 10^{-8}$ W$/m^2K^4$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

◇ (1893: Wien) La función $f_T(\nu)$ debe tener la forma

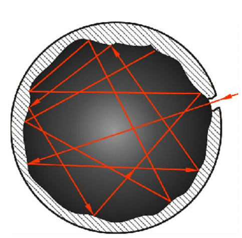
$$f_T(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

En consecuencia, el valor de $\nu_{\max}$ que corresponde a la frecuencia de la parte del espectro que radia más intensamente es tal que $\nu_{\max} \propto T$. Esto equivale a decir que $\lambda_{\max}T = C_W$, donde λ indica la longitud de onda y $C_W = 2,90 \times 10^{-3}$ mK es la constante de Wien, determinada experimentalmente.

Primer gran intento para explicar teóricamente la radiación de un cuerpo negro

Los físicos británicos *Lord Rayleigh* (1842-1919) y *Sir James Jeans* (1877-1946) intentaron describir, hacia finales del siglo XIX, la radiación espectral de la radiación electromagnética de todas las frecuencias de onda de un cuerpo negro a una temperatura dada. La deducción que ellos hicieron es como sigue:

Para encontrar $f_T(\nu)$, en primer lugar se encuentra $u_T(\nu)$, y para ello es necesario calcular el número de ondas electromagnéticas estacionarias de determinada frecuencia ν.



En realidad, si $E_T(\nu)$ denota la energía en el interior de la cavidad por unidad de frecuencia ν a una temperatura fija T, entonces

$$E_T(\nu) = (\text{número de ondas estacionarias por unidad de frecuencia } \nu) \times \langle E \rangle,$$

donde $\langle E \rangle$ es la energía promedio en esta configuración termodinámica. Aquí suponemos que la energía E se distribuye en la cavidad obedeciendo la ley de distribución de Boltzmann, es decir, $\langle E \rangle = k_B T$. Una vez que se halle $E_T(\nu)$, la densidad de energía se puede calcular como

$$u_T(\nu) = \frac{1}{V}\, E_T(\nu), \tag{2.1}$$

donde V es el volumen de la cavidad.

Por simplicidad en el argumento suponemos que la cavidad es una caja rectangular de lados l_x, l_y y l_z. Una onda estacionaria producida dentro de esta cavidad se obtiene de la superposición de ocho ondas viajeras de manera que las componentes del vector de onda $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ toman todos los signos posibles: $\pm k_x$, $\pm k_y$, $\pm k_z$, así se consideran todas las direcciones posibles para la propagación de las ondas.

De acuerdo con la ecuación de onda,

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial^2 t},$$

una expresión que da cuenta de la cuestión anterior, al superponer ondas viajeras de la forma $\mathcal{E}(\vec{r}, t) = \cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})$, es

$$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t),$$

donde $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular de esta onda estacionaria. También se puede obtener este resultado al aplicar el método de separación de variables y a continuación, las condiciones de frontera (la amplitud de cada onda debe ser cero en los bordes de la cavidad, para que en estos lugares se establezcan nodos) implican que

$$k_x l_x = n_x \pi, \quad k_y l_y = n_y \pi, \quad k_z l_z = n_z \pi,$$

o sea que

$$k_x = \frac{\pi}{l_x}\, n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{l_y}\, n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{l_z}\, n_z,$$

donde $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}^+$.

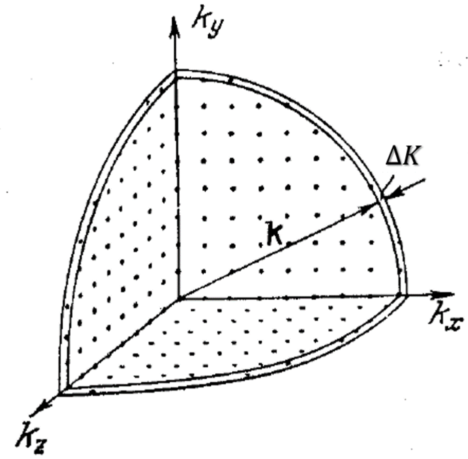
Denotemos por ΔN_ν al número de ondas estacionarias con frecuencias entre ν y $\nu + \Delta\nu$. Ahora, calcular la cantidad de estas ondas es equivalente a determinar los valores de k_x, k_y y k_z, con $k_x, k_y, k_z \geq 0$ y tales que

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \tag{2.2}$$

donde $k = \|\vec{k}\|$ es la magnitud del número de onda $\vec{k}$, correspondiente a la frecuencia ν, cuya relación viene dada por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\, \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{c}\, \nu. \tag{2.3}$$

Usando un argumento de pasar al k-espacio, el cálculo en 2.2 corresponde a contar los puntos k_x, k_y, k_z que se encuentran en un casacarón esférico de radio k con ancho Δk, ubicado en el primer octante, como lo muestra la siguiente figura:



Los puntos en el k-espacio que se encuentran entre $k_x + \Delta k_x$, $k_y + \Delta k_y$ y $k_z + \Delta k_z$ ocupan un volumen igual a

$$\begin{aligned}\Delta k_x \, \Delta k_y \, \Delta k_x &= \left(\frac{\pi}{l_x}(n_x+1) - \frac{\pi}{l_x} n_x\right)\left(\frac{\pi}{l_y}(n_y+1) - \frac{\pi}{l_y} n_y\right)\left(\frac{\pi}{l_z}(n_z+1) - \frac{\pi}{l_z} n_z\right) \\ &= \frac{\pi}{l_x}\,\frac{\pi}{l_y}\,\frac{\pi}{l_z} = \frac{\pi^3}{V},\end{aligned}$$

por tanto la densidad de tales puntos en el k-espacio es V/π^3. De esta manera,

$$\Delta N_\nu = \frac{V}{\pi^3}\,\frac{1}{8}\left(4\pi k^2\,\Delta k\right) = \frac{V}{2\pi^2}\,k^2\,\Delta k.$$

A partir de 2.3 podemos escribir esta última expresión en términos de ν:

$$\Delta N_\nu = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2\pi}{c}\,\nu\right)^2\left(\frac{2\pi}{c}\,\Delta\nu\right) = \frac{4\pi V}{c^3}\,\nu^2\,\Delta\nu.$$

En la cuenta anterior debemos multiplicar por 2, dado que existen dos tipos de polarización debidos a los campos eléctrico y magnético, $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Al dividar este resultado por el volumen obtenemos el número de ondas estacionarias por unidad de frecuencia ν y por unidad de volumen, digamos

$$n_\nu = \frac{8\pi}{c^3}\,\nu^2.$$

De 2.1 y el cálculo anterior obtenemos $u_T(\nu)$:

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\,\nu^2. \tag{2.4}$$

La expresión 2.4 se conoce como la fórmula de Rayleigh-Jeans para la densidad de energía de un cuerpo negro.

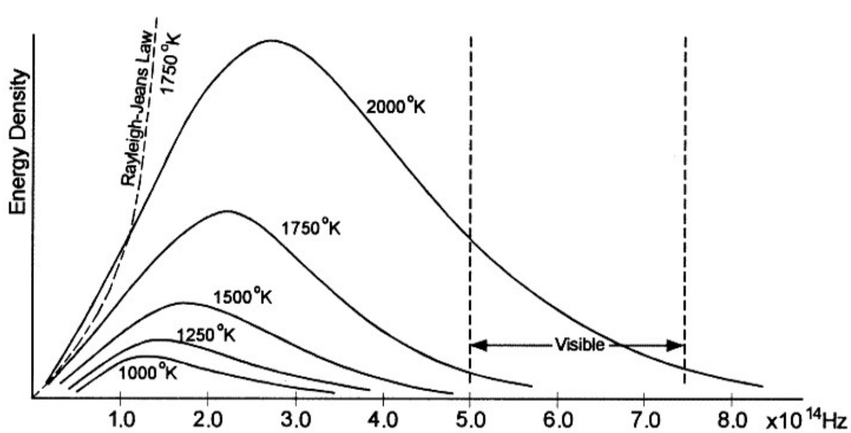
En principio, la fórmula 2.4 parece explicar las leyes empíricas observadas en un cuerpo negro, ya que

$$\begin{aligned} f_T(\nu) &= \frac{c}{4}\,\frac{8\pi k_B T}{c^3}\,\nu^2 = \frac{2\pi k_B T}{c^2}\,\nu^2 \\ &= \frac{2\pi k_B T}{c^2}\,\nu^2 = \frac{2\pi k_B}{c^2}\,\frac{T}{\nu}\,\nu^3 = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right). \end{aligned}$$

Sin embargo, una observación más detallada de $f_T(\nu)$ permite ver que esta función no tiene un máximo absoluto, y también

$$\mathcal{R}_T = \int_0^\infty f_T(\nu)\,d\nu = \int_0^\nu \frac{2\pi k_B T}{c^2}\,\nu^2\,d\nu = \infty,$$

lo cual implica que, al elevar uniformemente la temperatura, se radiaría una cantidad infinita de energía, algo imposible termodinámicamente. A este hecho se le conoce como *la catástrofe ultravioleta*, dado que esto es consecuencia del comportamiento de la fórmula de Rayleigh-Jeans para valores grandes de ν, es decir, la fórmula 2.4 no explica de manera coherente la parte del espectro que se encuentra en el ultravioleta.



La solución exitosa de este problema se debe al físico alemán *Max Planck* (1858-1947) y constituye el hecho fundamental que dio paso al nacimiento de la Mecánica Cuántica a principios del siglo XX. A continuación citamos un fragmento introductorio presente en los libros [R] y [S]:

> En una reunión de la Sociedad Alemana de Física en 1900, Max Planck leyó su escrito sobre "Sobre la Teoría de la Ley de la Distribución de la Energía del Espectro Normal". Ese documento, que al principio atrajo poca atención, significó el comienzo de una revolución en la Física. La fecha de su presentación fue llamada "natalicio de la teoría cuántica", y tuvo que pasar un cuarto de siglo para que se desarrollara la teoría moderna de la Mecánica Cuántica, base de nuestro conocimiento actual. Muchas sendas convergieron en este entendimiento; cada una mostraba otro aspecto del derrumbamiento de la Física Clásica.

En el cálculo clásico de la energía promedio $\langle E \rangle$ de un número grande de partículas idénticas en equilibrio térmico mutuo, a temperatura T (cálculo que conduce a la ley de la equipartición), se supone que la energía E es una variable aleatoria continua. Planck encontró que si, en cambio, suponía que la energía E era una variable discreta, entonces se podía obtener el comportamiento deseado para la energía promedio $\langle E \rangle$. Planck consideró que en la superficie de la cavidad de un cuerpo negro se enontraban pequeños osciladores que vibraban de acuerdo a la frecuencia de la radiación, recibida en forma de ondas electromagnéticas estacionarias, y que por tanto la energía promedio de dichas ondas es *dependiente* de la frecuencia ν. La suposición más sencilla que se puede hacer es que esta dependencia sea una proporción directa.

Postulado de Planck (1900): La energía de un oscilador en un cuerpo negro se encuentra cuantizada, y corresponde a la expresión

$$E_n = nh\nu,$$

donde n es un número natural, ν es la frecuencia y h es la constante de Planck.

Algunos experimentos permitieron establecer un valor aproximado de h:

$$h = 6,626 \times 10^{-34}\, J \cdot s.$$

A continuación realizamos el cálculo de la energía promedio, siguiendo el postulado de Planck en la ley de distribución de Boltzmann, considerando a la energía como una variable discreta.

Consideramos entonces que la distribución de Boltzmann para la energía tiene la forma

$$\mathcal{P}(E_n) = A\, e^{-\beta\, E_n}, \qquad \text{para } n \geq 0,$$

donde $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$ y $E_n = nh\nu$. Aquí A es una constante de normalización, por lo tanto,

$$\frac{1}{A} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\beta h\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta h\nu}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}},$$

de donde $A = 1 - e^{-\beta h\nu}$.
Para el cálculo de la serie hemos usado que $e^{-\beta h\nu} < e^{-\beta h\cdot 0} = 1,$ para $\nu > 0$, y por tanto la serie geométrica es convergente. En consecuencia,

$$\mathcal{P}(E_n) = (1 - e^{-\beta h\nu})e^{-n\beta h\nu}, \qquad \text{para } n \geq 0.$$

Con esto pasamos a calcular la energía promedio $\langle E\rangle$. Denotemos por $\alpha = \beta h\nu$; entonces

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \mathcal{P}(E_n) = (1-e^{-\beta h\nu})\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-n\beta h\nu}\\
&= h\nu\,(1-e^{-\alpha})\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\alpha} = -h\nu\,(1-e^{-\alpha})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-n\alpha}\right)\\
&= -h\nu\,(1-e^{-\alpha})\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right) = -h\nu\,(1-e^{-\alpha})\frac{d}{d\alpha}\left(1-e^{-\alpha}\right)^{-1}\\
&= h\nu\,(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\alpha})^{-2}(e^{-\alpha}) = h\nu\,\frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\\
&= \frac{h\nu}{e^{\alpha}-1} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en la fórmula 2.4 cambiamos k_BT por el valor obtenido para $\langle E\rangle$ en el cálculo anterior:

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\,\frac{h\nu^3}{exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}. \tag{2.5}$$

La expresión en 2.5 se conoce como la fórmula de Plank para la densidad de energía de un cuerpo negro. A partir de $u_T(\nu)$, podemos escribir a $f_T(\nu)$:

$$\boxed{f_T(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}}. \tag{2.6}$$

Deducción de la Ley de Wien a partir de la fórmula de Planck

En primer lugar notemos que $f_T(\nu)$ tiene la forma funcional deseada, ya que

$$f_T(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1} = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Veamos ahora que a partir de $f_T(\nu)$ se puede deducir la ley de desplazamiento de Wien. Siendo fieles a la historia, deduzcamos la relación de Wien entre la longitud de onda λ y la temperatura T. Para ello escribamos $f_T(\nu)$ en términos de λ; adem, dado que f_T es una razón de cambio respecto a ν y

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\,\Delta\lambda,$$

debemos entonces multiplicar a $f_T(c/\lambda)$ por $\dfrac{c}{\lambda^2}$. Llamemos a esta función $\varphi_T(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_T(\lambda) &= \frac{c}{\lambda^2}\,\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3\frac{1}{exp\left(\frac{hc}{k_BT\lambda}\right)-1}\\
&= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{exp\left(\frac{hc}{k_BT\lambda}\right)-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, encontremos los puntos críticos de esta función. Para simplificar la escritura en los cálculos, denotemos por $\mu = hc/k_B T$, así que

$$\varphi_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\mu/\lambda} - 1}.$$

Un cómputo directo de la derivada de φ_T resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\varphi_T(\lambda) &= 2\pi hc^2 \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{-5}\left(e^{\mu/\lambda} - 1\right)^{-1}\right] \\
&= 2\pi hc^2 \left[-5\lambda^{-6}\left(e^{\mu/\lambda} - 1\right)^{-1} - \lambda^{-5}\left(e^{\mu/\lambda} - 1\right)^{-2} \cdot e^{\mu/\lambda}\left(-\frac{\mu}{\lambda^2}\right)\right] \\
&= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^6\left(e^{\mu/\lambda} - 1\right)^2}\left[\frac{\mu}{\lambda}e^{\mu/\lambda} - 5\left(e^{\mu/\lambda} - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

Para $\lambda > 0$ esta derivada es nula si $x = \dfrac{\mu}{\lambda}$ es una solución de la ecuación trascendente

$$x\, e^x - 5(e^x - 1) = 0.$$

Usando alguna aproximación numérica, por ejemplo el método de Newton iniciando con $x = 5$, se puede ver que $x \approx 4,965$; también se puede ver que ésta es la única solución. Por lo tanto, el valor de $\lambda_{\text{máx}}$ en el cual la función φ_T alcanza su máximo absoluto es

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{máx}} &= \frac{\mu}{x} = \frac{hc}{x\, k_B T} \\
\Rightarrow \lambda_{\text{máx}} T &\approx \frac{hc}{4,965\, k_B}.
\end{aligned}$$

A partir de los valores de h, c y k_B podemos estimar el valor de la constante del lado derecho en la expresión anterior.

- ◇ $h = 6,626 \times 10^{-34}\, J \cdot s$,
- ◇ $c = 299\,792\,458\, m/s$,
- ◇ $k_B = 1,381 \times 10^{-23}\, J/K$,

luego,

$$\lambda_{\text{máx}} T \approx \frac{hc}{4,965\, k_B} \approx 2,8976 \times 10^{-3}\, m \cdot K,$$

que es precisamente la constante de Wien, C_W.

Deducción de la Ley de Stefan-Boltzmann a partir de la fórmula de Planck

Queremos ver que $\mathcal{R}_T$ es directamente proporcional a T^4. Para ello debemos calcular explícitamente la integral impropia que define a $\mathcal{R}_T$. Por simplicidad en el cómputo, definimos

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}.$$

De este manera, $d\nu = \dfrac{k_B T}{h}\, dx$ y

$$f_T(\nu) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T\, x}{h}\right)^3 \frac{1}{e^x - 1}$$
$$= \frac{2\pi\, k_B^3}{h^2 c^2}\, T^3\, \frac{x^3}{e^x - 1}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{R}_T = \int_0^\infty f_T(\nu)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi\, k_B^3}{h^2 c^2}\, T^3\, \frac{x^3}{e^x - 1}\, \frac{k_B T}{h}\, dx$$
$$= \frac{2\pi\, k_B^4}{h^3 c^2}\, T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}\, \frac{2\pi\, k_B^4}{h^3 c^2}\, T^4$$
$$= \frac{2\pi^5\, k_B^4}{15\, h^3 c^2}\, T^4.$$

Nuevamente, podemos estimar la constante que acompaña a T^4 a partir de los valores de h, c y k_B:

$$\frac{2\pi^5\, k_B^4}{15\, h^3 c^2} \approx 5{,}668 \times 10^{-8}\, \frac{W}{m^2 K^4},$$

que es precisamente la constante de Stefan-Boltzmann, σ.

En el cálculo de $\mathcal{R}_T$, hemos hecho uso del valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(4)\, \zeta(4) = 3!\, \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15},$$

como lo muestra el siguiente cómputo, que es bastante ingenioso:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \int_0^\infty x^3\, \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx$$
$$\int_0^\infty x^3 \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx}\, dx$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty (nx)^3 e^{-nx}\, d(nx) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty y^{4-1} e^{-y}\, dy$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}\, \Gamma(4) = \Gamma(4)\, \zeta(4).$$

References

[E] Eisberg, R., Resnick, R., *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc, New York, 1985.

[R] Resnick, R., *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc, New York, 1985.

[S] Savelyev, I., *Physics, A General Course*, Volume III, MIR Publishers, Moscow, 1989.