Vers une notion d'Intégrabilité

Carlos León

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers

Journée des doctoriales

Poitiers

5 juillet 2019

En mécanique classique on trouve des systèmes mécaniques avec un nombre suffisant de constantes de mouvement, souvent provenant d'une symétrie :

En mécanique classique on trouve des systèmes mécaniques avec un nombre suffisant de constantes de mouvement, souvent provenant d'une symétrie :

- Invariance par traslation,
- Invariance par rotation, etc.

En mécanique classique on trouve des systèmes mécaniques avec un nombre suffisant de constantes de mouvement, souvent provenant d'une symétrie :

- Invariance par traslation,
- Invariance par rotation, etc.

Ceci implique qu'une integration explicite des equations de mouvement soit possible.

Exemple : L'oscillateur harmoninique simple

Exemple : L'oscillateur harmoninique simple

Exemple : L'oscillateur harmoninique simple

- q : position, p : impulsion.
- Energie totale du système : $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.
- Equations de mouvement :

$$\dot{q} = p,$$
$$\dot{p} = -q.$$

Exemple : L'oscillateur harmoninique simple

- q : position, p : impulsion.
- Energie totale du système : $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.
- Equations de mouvement :

$$\dot{q} = p,$$
$$\dot{p} = -q.$$

Étant donné que l'énergie est constante, on peut écrire :

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{2H - q^2}}.$$

Exemple : L'oscillateur harmoninique simple

- q : position, p : impulsion.
- Energie totale du système : $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.
- Equations de mouvement :

$$\dot{q} = p,$$
$$\dot{p} = -q.$$

Étant donné que l'énergie est constante, on peut écrire :

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{2H - q^2}}.$$

En fait, on a : $\quad q(t) = A\sin(t+\delta), \qquad p(t) = A\cos(t+\delta).$

Il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi. On les appelle des *intégrales premières*.

Il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi. On les appelle des *intégrales premières*.

S'il y en a assez, Liouville a demontré au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que l'on peut résoudre le système différentiel par des quadratures.

Il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi. On les appelle des *intégrales premières*.

S'il y en a assez, Liouville a demontré au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que l'on peut résoudre le système différentiel par des quadratures.

> *Le mouvement décrit par un système hamiltonien intégrable est extrêmement régulier.*

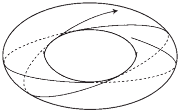
Il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi. On les appelle des *intégrales premières*.

S'il y en a assez, Liouville a demontré au XIX$^{\text{ème}}$ siècle que l'on peut résoudre le système différentiel par des quadratures.

> *Le mouvement décrit par un système hamiltonien intégrable est extrêmement régulier.*

Dans la terminologie moderne : **Arnold-Lioville**

> *Les trajectoires s'enroulent sur des tores, chacune revenant régulièrement près de son point initial. On parle d'un mouvement quasi-périodique.*



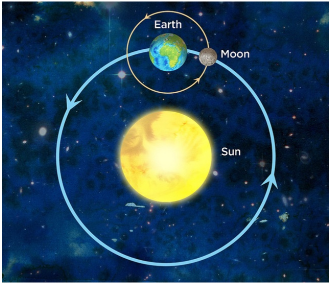
Les systèmes hamiltoniens sont-ils tous intégrables ?

Les systèmes hamiltoniens sont-ils tous intégrables ?

Poincaré : Le problème à trois corps n'est pas intégrable (il ne possède pas assez d'intégrales premières analytiques).

Les systèmes hamiltoniens sont-ils tous intégrables ?

Poincaré : Le problème à trois corps n'est pas intégrable (il ne possède pas assez d'intégrales premières analytiques).



Intégrabilité au sens de Liouville

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

(M, π) est une variété de Poisson si le bivecteur π est de carré nul pour le crochet de Schouten ; c'est-à-dire $[\pi, \pi]_S = 0$.

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

(M, π) est une variété de Poisson si le bivecteur π est de carré nul pour le crochet de Schouten ; c'est-à-dire $[\pi, \pi]_S = 0$.

Crochet de Poisson : $\{f, g\} = \pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g), \qquad f, g \in \mathcal{F}(U).$

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

(M, π) est une variété de Poisson si le bivecteur π est de carré nul pour le crochet de Schouten ; c'est-à-dire $[\pi, \pi]_S = 0$.

Crochet de Poisson : $\{f, g\} = \pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g), \qquad f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Champ de vecteurs hamiltonien : Pour $H \in \mathcal{F}(U)$, $\chi_H := \{\cdot, H\}$.

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

(M, π) est une variété de Poisson si le bivecteur π est de carré nul pour le crochet de Schouten ; c'est-à-dire $[\pi, \pi]_S = 0$.

Crochet de Poisson : $\{f, g\} = \pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g), \qquad f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Champ de vecteurs hamiltonien : Pour $H \in \mathcal{F}(U)$, $\chi_H := \{\cdot, H\}$.

Dynamique du système hamiltonien : Pour $f \in \mathcal{F}(U)$,

$$\dot{f} = \chi_H(f) = \{f, H\}.$$

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

(M, π) est une variété de Poisson si le bivecteur π est de carré nul pour le crochet de Schouten ; c'est-à-dire $[\pi, \pi]_S = 0$.

Crochet de Poisson : $\{f, g\} = \pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g), \qquad f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Champ de vecteurs hamiltonien : Pour $H \in \mathcal{F}(U)$, $\chi_H := \{\cdot, H\}$.

Dynamique du système hamiltonien : Pour $f \in \mathcal{F}(U)$,

$$\dot{f} = \chi_H(f) = \{f, H\}.$$

On dit que f est une intégrale première (constante de mouvement) si $\dot{f} = \{f, H\} = 0$.

Intégrabilité au sens de Liouville

M : variété réelle lisse ; $U \subseteq M$: un ouvert.
$\mathcal{F}(U)$: fonctions lisses sur U.

(M, π) est une variété de Poisson si le bivecteur π est de carré nul pour le crochet de Schouten ; c'est-à-dire $[\pi, \pi]_S = 0$.

Crochet de Poisson : $\{f, g\} = \pi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g), \qquad f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Champ de vecteurs hamiltonien : Pour $H \in \mathcal{F}(U)$, $\chi_H := \{\cdot, H\}$.

Dynamique du système hamiltonien : Pour $f \in \mathcal{F}(U)$,

$$\dot{f} = \chi_H(f) = \{f, H\}.$$

On dit que f est une intégrale première (constante de mouvement) si $\dot{f} = \{f, H\} = 0$.

Poisson : Si f et g sont deux intégrales premières, alors $\{f, g\}$ l'est aussi.

$S \subseteq \mathcal{F}(M)$ est involutive si pour tous $f, g \in S$, $\{f, g\} = 0$.

$S \subseteq \mathcal{F}(M)$ est involutive si pour tous $f, g \in S$, $\{f, g\} = 0$.

On suppose que S est engendrée par s fonctions : $S = \langle \mathbf{F} \rangle$, où

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s).$$

$S \subseteq \mathcal{F}(M)$ est involutive si pour tous $f, g \in S$, $\{f, g\} = 0$.

On suppose que S est engendrée par s fonctions : $S = \langle \mathbf{F} \rangle$, où

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s).$$

Ecrivons $\dim(M) = n$ et $\mathrm{rang}(\pi) = 2r$. Lorsque S est involutive et indépendante, on a $s \leq n - r$

$S \subseteq \mathcal{F}(M)$ est involutive si pour tous $f, g \in S$, $\{f, g\} = 0$.

On suppose que S est engendrée par s fonctions : $S = \langle \mathbf{F} \rangle$, où

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s).$$

Ecrivons $\dim(M) = n$ et $\text{rang}(\pi) = 2r$. Lorsque S est involutive et indépendante, on a $s \leq n - r$

> *On dit que (M, π, S) est intégrable au sens de Liouville si S est involutive, indépendante et $s = n - r$.*

$S \subseteq \mathcal{F}(M)$ est involutive si pour tous $f, g \in S$, $\{f, g\} = 0$.

On suppose que S est engendrée par s fonctions : $S = \langle \mathbf{F} \rangle$, où

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s).$$

Ecrivons $\dim(M) = n$ et $\mathrm{rang}(\pi) = 2r$. Lorsque S est involutive et indépendante, on a $s \leq n - r$

> *On dit que (M, π, S) est intégrable au sens de Liouville si S est involutive, indépendante et $s = n - r$.*

Théorème : Si (M, π, S) est un système intégrable au sens de Liouville, alors pour tout point *raisonable* p de la variété, la courbe intégrale de χ_{F_i} partant de p peut être déterminée par quadratures.

Exemple : L'oscillateur harmonique n-dimensionnel

Exemple : L'oscillateur harmonique n-dimensionnel

- $M = \mathbb{R}^{2n}$; coordonnées : $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.
- Crochet de Poisson : $\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$. Ici $\mathrm{rang}(\pi) = 2n$.
- Hamiltonien (énergie du système) : $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + \nu q_i^2)$.
- Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $F_i := \frac{1}{2}(p_i^2 + \nu q_i^2)$. Alors $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est indépendant et involutif.

Exemple : L'oscillateur harmonique n-dimensionnel

- $M = \mathbb{R}^{2n}$; coordonnées : $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.
- Crochet de Poisson : $\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$. Ici $\mathrm{rang}(\pi) = 2n$.
- Hamiltonien (énergie du système) : $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + \nu q_i^2)$.
- Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $F_i := \frac{1}{2}(p_i^2 + \nu q_i^2)$. Alors $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est indépendant et involutif.

L'oscillateur harmonique est intégrable au sens de Liouville !

Exemple : L'oscillateur harmonique n-dimensionnel

- $M = \mathbb{R}^{2n}$; coordonnées : $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$.
- Crochet de Poisson : $\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$. Ici $\mathrm{rang}(\pi) = 2n$.
- Hamiltonien (énergie du système) : $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + \nu q_i^2)$.
- Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $F_i := \frac{1}{2}(p_i^2 + \nu q_i^2)$. Alors $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est indépendant et involutif.

L'oscillateur harmonique est intégrable au sens de Liouville !

Remarque : Pour un point générique $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$, la sous-variété

$$\mathbf{F}_c = \{p \in \mathbb{R}^{2n} \mid F_i(p) = c_i\}$$

est un produit de cercles $p_i^2 + \nu q_i^2 = r_i^2$ (*i.e.*, un tore de dimension n) - (**Théorème de Liouville**).

On se place maintenant dans le cas complexe (sur $\mathbb{C}$).

On se place maintenant dans le cas complexe (sur $\mathbb{C}$).

Géométriquement, ce qui reste valable :

- Les champs intégrables commutent : $[\chi_{F_i}, \chi_{F_j}] = 0$.
- Les champs des vecteurs sont tangents aux fibres lisses de l'application $p \mapsto (F_1(p), \ldots, F_s(p))$. Ces champs définissent génériquement une distribution intégrable.
- Génériquement, les courbes intégrales de χ_{F_i} peuvent être déterminées par quadratures.

On se place maintenant dans le cas complexe (sur $\mathbb{C}$).

Géométriquement, ce qui reste valable :

- Les champs intégrables commutent : $[\chi_{F_i}, \chi_{F_j}] = 0$.
- Les champs des vecteurs sont tangents aux fibres lisses de l'application $p \mapsto (F_1(p), \ldots, F_s(p))$. Ces champs définissent génériquement une distribution intégrable.
- Génériquement, les courbes intégrales de χ_{F_i} peuvent être déterminées par quadratures.

Ce qui ne marche plus : le théorème de Liouville !

Exemple :

- $M = \mathbb{C}^2$; coordonnées : (x, y).
- Crochet de Poisson : $\{x, y\} = 1$. Ici $\mathrm{rang}(\pi) = 2$.
- Hamiltonien : $H = y^2 - x^5$.
- On a : $n = 2$, $r = 1$ et $s = 1$, d'où $s = n - r$. En conséquence ce système-ci est intégrable au sens de Liouville.
- Fibre générique : $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^5 + c\}$ est une surface de Riemann de genre 2, privée d'un point à l'infini.
- Problème : On ne peut pas étendre le champ de vecteurs χ_H sur la surface de Riemann compactifiée.

Exemple :

- $M = \mathbb{C}^2$; coordonnées : (x, y).
- Crochet de Poisson : $\{x, y\} = 1$. Ici $\mathrm{rang}(\pi) = 2$.
- Hamiltonien : $H = y^2 - x^5$.
- On a : $n = 2$, $r = 1$ et $s = 1$, d'où $s = n - r$. En conséquence ce système-ci est intégrable au sens de Liouville.
- Fibre générique : $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^5 + c\}$ est une surface de Riemann de genre 2, privée d'un point à l'infini.
- Problème : On ne peut pas étendre le champ de vecteurs χ_H sur la surface de Riemann compactifiée.

On a besoin d'une notion d'intégrabilité qui soit satisfaisante pour le cas complexe.

Intégrabilité algébrique complète

Intégrabilité algébrique complète

Soit $\mathcal{F} := (\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial et $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ est constitué de polynômes. On dit que $\mathcal{F}$ est une système a.c.i. si

Intégrabilité algébrique complète

Soit $\mathcal{F} := (\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial et $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ est constitué de polynômes. On dit que $\mathcal{F}$ est une système a.c.i. si

- Pour $\kappa \in \mathbb{C}^s$ générique, la fibre $\mathbf{F}_\kappa$ est isomorphe à une partie affine d'un tore complexe algébrique,

$$\mathbf{F}_\kappa \simeq \left(\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_\kappa\right) - \mathcal{D}_\kappa,$$

  où Λ_κ est un réseau dans $\mathbb{C}^{n-s}$ est $\mathcal{D}_\kappa$ est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_\kappa$;
- Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}_{F_i}$, restreints à $\mathbf{F}_\kappa$ sont constants.

Merci pour votre attention !