# Le rayonnement du corps noir

Carlos León Gil

Laboratoire de Mathématiques et Applications

Université de Poitiers

Doctoriale

Poitiers

9 mai 2018

La théorie du **corps noir** est l'un des plus importants problèmes de la physique théorique et il est à l'origine de la physique quantique.

La théorie du **corps noir** est l'un des plus importants problèmes de la physique théorique et il est à l'origine de la physique quantique.

De quoi s'agit-il ?

La théorie du **corps noir** est l'un des plus importants problèmes de la physique théorique et il est à l'origine de la physique quantique.

De quoi s'agit-il ?

Le rayonnement émis par un corps en raison de sa température est appelé **rayonnement thermique**.

Si on éleve uniformément la température d'un corps chaud, on observe principalement deux effets :

Si on éleve uniformément la température d'un corps chaud, on observe principalement deux effets :

Si on éleve uniformément la température d'un corps chaud, on observe principalement deux effets :

- Plus la température est élevée, plus le rayonnement émis est intense.

Si on éleve uniformément la température d'un corps chaud, on observe principalement deux effets :

- Plus la température est élevée, plus le rayonnement émis est intense.
- Plus la température est élevée, plus la fréquence de la partie du spectre qui rayonne plus intensément est grande.

Si on éleve uniformément la température d'un corps chaud, on observe principalement deux effets :

- Plus la température est élevée, plus le rayonnement émis est intense.
- Plus la température est élevée, plus la fréquence de la partie du spectre qui rayonne plus intensément est grande.

**Question :** Pourquoi et comment un corps émet-il de la lumière lorsqu'on le chauffe ?

On se place dans le cadre de la thermodynamique. La mécanique statistique est l'outil à utiliser pour résoudre la question précedente.

On se place dans le cadre de la thermodynamique. La mécanique statistique est l'outil à utiliser pour résoudre la question précedente.

À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la spectroscopie prend une importance particulière, puisqu'il s'agit de déterminer la nature de la matière en étudiant la lumière qu'elle émet.

On se place dans le cadre de la thermodynamique. La mécanique statistique est l'outil à utiliser pour résoudre la question précedente.

À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la spectroscopie prend une importance particulière, puisqu'il s'agit de déterminer la nature de la matière en étudiant la lumière qu'elle émet.

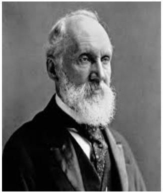
**Qu'est-ce qu'un corps noir ?**

On se place dans le cadre de la thermodynamique. La mécanique statistique est l'outil à utiliser pour résoudre la question précedente.

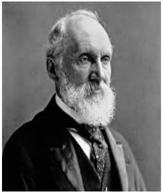
À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la spectroscopie prend une importance particulière, puisqu'il s'agit de déterminer la nature de la matière en étudiant la lumière qu'elle émet.

**Qu'est-ce qu'un corps noir ?**

Pour un physicien, un corps noir n'est pas un objet absolument pas lumineux (attention !), mais c'est un *corps parfaitement absorbant*.

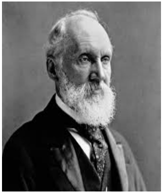


**Lord Kelvin** (1824 - 1907) est le premier à souligner l'importance de ce problème.



**Lord Kelvin** (1824 - 1907) est le premier à souligner l'importance de ce problème.

**Ludwig Boltzmann** (1844 - 1906) pose les fondements théoriques sur le rayonnement du corps noir.



**Lord Kelvin** (1824 - 1907) est le premier à souligner l'importance de ce problème.

**Ludwig Boltzmann** (1844 - 1906) pose les fondements théoriques sur le rayonnement du corps noir.

**Max Planck** (1858 - 1947) élucide la nature de ce phénomène et propose une solution cohérente avec les observations expérimentales. Ses idées sur les *quanta* conduiront à la naissance de la mécanique quantique.

Préliminaire important : **Distribution de Boltzmann**

Préliminaire important : **Distribution de Boltzmann**

Considérons un système à $N$ particules et $l$ valeurs d'énergie possibles : $E_1, \ldots, E_l$.
Notons $n_1, \ldots, n_l$ le nombre de particules dans le niveau d'énergie $E_1, \ldots, E_l$, respectivement, et $E$ l'énergie totale.

Préliminaire important : **Distribution de Boltzmann**

Considérons un système à $N$ particules et $l$ valeurs d'énergie possibles : $E_1, \ldots, E_l$.
Notons $n_1, \ldots, n_l$ le nombre de particules dans le niveau d'énergie $E_1, \ldots, E_l$, respectivement, et $E$ l'énergie totale.

Le nombre de *micro-états* correspondant au *macrostate* $(n_1, \ldots n_l)$ est :

$$\Omega(n_1, \ldots n_l) = \frac{N!}{n_1! \cdots n_l!}.$$

Préliminaire important : **Distribution de Boltzmann**

Considérons un système à $N$ particules et $l$ valeurs d'énergie possibles : $E_1, \ldots, E_l$.
Notons $n_1, \ldots, n_l$ le nombre de particules dans le niveau d'énergie $E_1, \ldots, E_l$, respectivement, et $E$ l'énergie totale.

Le nombre de *micro-états* correspondant au *macrostate* $(n_1, \ldots n_l)$ est :

$$\Omega(n_1, \ldots n_l) = \frac{N!}{n_1! \cdots n_l!}.$$

Prémisse : *Le macrostate (distribution) avec le plus grand nombre de micro-états sera la distribution la plus probable.*

**Problème :** Maximiser la fonction $\Omega$ (ce qui équivaut à maximiser $\ln(\Omega)$) restreinte à

$$N = \sum_{j=1}^{l} n_j \quad \text{et} \quad E = \sum_{j=1}^{l} E_j .$$

**Problème :** Maximiser la fonction $\Omega$ (ce qui équivaut à maximiser $\ln(\Omega)$) restreinte à

$$N = \sum_{j=1}^{l} n_j \quad \text{et} \quad E = \sum_{j=1}^{l} E_j.$$

Il en résulte que $\dfrac{n_j}{N} = A\, \mathrm{e}^{\beta E_j}$.

C'est la probabilité de trouver une particule dans le niveau d'énergie $E_j$.

**Problème :** Maximiser la fonction $\Omega$ (ce qui équivaut à maximiser $\ln(\Omega)$) restreinte à

$$N = \sum_{j=1}^{l} n_j \quad \text{et} \quad E = \sum_{j=1}^{l} E_j .$$

Il en résulte que $\dfrac{n_j}{N} = A\,\mathrm{e}^{\beta E_j}$.

C'est la probabilité de trouver une particule dans le niveau d'énergie $E_j$.

Distribution de probabilité : $\mathcal{P}(E) = \beta\,\mathrm{e}^{\beta E}, \qquad E \geq 0.$

**Problème :** Maximiser la fonction $\Omega$ (ce qui équivaut à maximiser $\ln(\Omega)$) restreinte à

$$N = \sum_{j=1}^{l} n_j \quad \text{et} \quad E = \sum_{j=1}^{l} E_j.$$

Il en résulte que $\dfrac{n_j}{N} = A\,\mathrm{e}^{\beta E_j}$.

C'est la probabilité de trouver une particule dans le niveau d'énergie $E_j$.

Distribution de probabilité : $\mathcal{P}(E) = \beta\,\mathrm{e}^{\beta E}, \qquad E \geq 0.$

Après quelques considérations thermodynamiques, il s'ensuit que

$$\beta = \frac{1}{k_B T},$$

où $T$ est la température et $k_B = 1,381 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann.

**Quelques notations :**

**Quelques notations :**

- **Luminance énergétique :** $\mathcal{R}_T$.
- **Émissivité :** $r_T(\nu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathcal{R}_T(\nu)$, où $\nu$ désigne la fréquence.
- **Absorptivité :** $a_T$. Un corps noir se caractérise précisément par la propriété $a_T = 1$.

**Quelques notations :**

- **Luminance énergétique :** $\mathcal{R}_T$.
- **Émissivité :** $r_T(\nu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathcal{R}_T(\nu)$, où $\nu$ désigne la fréquence.
- **Absorptivité :** $a_T$. Un corps noir se caractérise précisément par la propriété $a_T = 1$.

**Gustav Kirchhoff (1824 - 1887)**

**Loi du rayonnement de Kirchhoff (1859)** La raison entre l'émissivité et l'absorptivité d'un corps rayonnant ne dépend pas de sa nature, mais elle est plutôt une fonction universelle de la température et de la fréquence pour tous les corps.

**Quelques notations :**

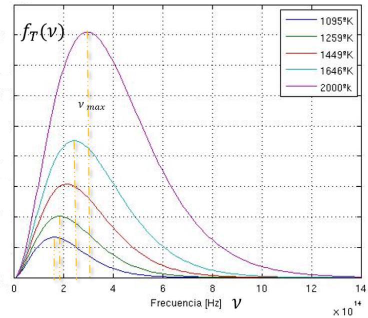
- **Luminance énergétique :** $\mathcal{R}_T$.
- **Émissivité :** $r_T(\nu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\mathcal{R}_T(\nu)$, où $\nu$ désigne la fréquence.
- **Absorptivité :** $a_T$. Un corps noir se caractérise précisément par la propriété $a_T = 1$.

**Gustav Kirchhoff (1824 - 1887)**

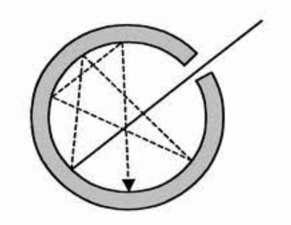
**Loi du rayonnement de Kirchhoff (1859)** La raison entre l'émissivité et l'absorptivité d'un corps rayonnant ne dépend pas de sa nature, mais elle est plutôt une fonction universelle de la température et de la fréquence pour tous les corps.

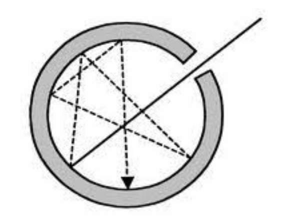
$$\frac{r_T(\nu)}{a_T(\nu)} = f_T(\nu) \equiv \text{fonction universelle de Kirchhoff.}$$

Expérimentalement, il est possible de déterminer le profil de la fonction universelle de Kirchhoff :



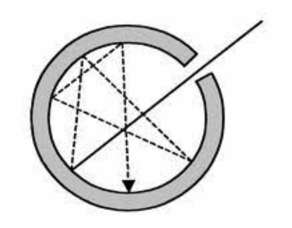

Distribution du rayonnement du corps noir.





Dans l'équilibre thermique, l'énergie rayonnée sera répartie dans la cavité avec une densité d'énergie bien définie (par unité de volume), $\mathcal{U} = \mathcal{U}_T$.

On définit $u_T(\nu) = \dfrac{d}{d\nu}\mathcal{U}_T(\nu)$.



Dans l'équilibre thermique, l'énergie rayonnée sera répartie dans la cavité avec une densité d'énergie bien définie (par unité de volume), $\mathcal{U} = \mathcal{U}_T$.

On définit $u_T(\nu) = \dfrac{d}{d\nu}\mathcal{U}_T(\nu)$.

Le rapport entre $f_T(\nu)$ et $u_T(\nu)$ vient donné par

$$f_T(\nu) = \frac{c}{4}\, u_T(\nu),$$

où $c$ désigne la vitesse de la lumière.

# Précédents

## Précédents

**Joseph Stefan**
**(1835 - 1893)**

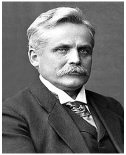
**Stefan, 1879 ; Boltzmann, 1884** Pour un corps noir,

$$\mathcal{R}_T = \sigma T^4,$$

où $\sigma = 5,668 \times 10^{-8}$ W$/m^2K^4$ est la constante de Stefan-Boltzmann.

## Précédents

**Joseph Stefan**
**(1835 - 1893)**



**Wilhelm Wien**
**(1864 - 1928)**

**Stefan, 1879 ; Boltzmann, 1884** Pour un corps noir,

$$\mathcal{R}_T = \sigma T^4,$$

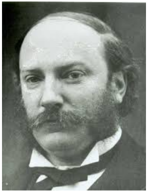
où $\sigma = 5,668 \times 10^{-8}$ W$/m^2 K^4$ est la constante de Stefan-Boltzmann.

**Wien, 1893** La fonction $f_T$ doit avoir la forme

$$f_T(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Par conséquent, la valeur de $\nu_{\max}$ qui correspond à la fréquence de la partie du spectre qui rayonne plus intensément est telle que $\nu_{\max} \propto T$. Cela équivaut à dire que $\lambda_{\max} T = C_W$, où $\lambda$ indique la longueur d'onde et $C_W = 2,90 \times 10^{-3}$ mK est la constante de Wien, déterminé expérimentalement.

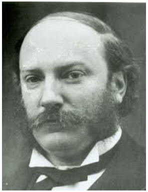
À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Lord Rayleigh s'associe avec James Jeans et s'attaquent au problème de trouver une formule qui puisse décrire l'analyse spectrale du corps noir.



**Lord Rayleigh**
**(1842 - 1919)**

**James Jeans**
**(1877 - 1946)**

À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Lord Rayleigh s'associe avec James Jeans et s'attaquent au problème de trouver une formule qui puisse décrire l'analyse spectrale du corps noir.

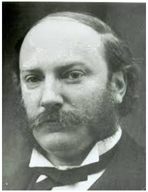


**Lord Rayleigh**
**(1842 - 1919)**

**James Jeans**
**(1877 - 1946)**

Si $E_T(\nu)$ désigne l'énergie à l'intérieur de la cavité par unité de fréquence $\nu$ à une température fixe $T$, alors

À la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Lord Rayleigh s'associe avec James Jeans et s'attaquent au problème de trouver une formule qui puisse décrire l'analyse spectrale du corps noir.

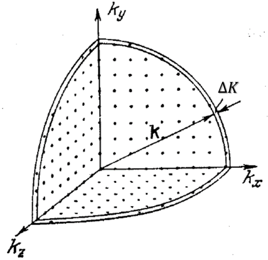


**Lord Rayleigh**
**(1842 - 1919)**

**James Jeans**
**(1877 - 1946)**

Si $E_T(\nu)$ désigne l'énergie à l'intérieur de la cavité par unité de fréquence $\nu$ à une température fixe $T$, alors

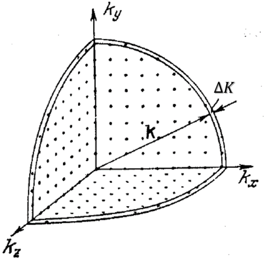
- $E_T(\nu) =$
  (nombre d'ondes stationnaires par unité de fréquence $\nu$) $\times \langle E \rangle$,
- $u_T(\nu) = \frac{1}{\text{Vol}} E_T(\nu)$.




**Loi de Rayleigh-Jeans**

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\,\nu^2.$$

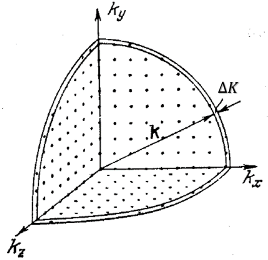
.




**Loi de Rayleigh-Jeans**

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\,\nu^2.$$

On constate que $f_T(\nu) = \dfrac{2\pi k_B}{c^2}\,\dfrac{T}{\nu}\,\nu^3 = \nu^3 F\left(\dfrac{\nu}{T}\right)$.

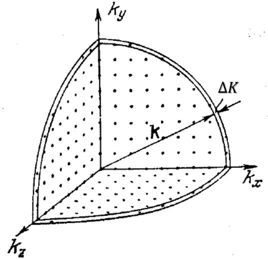



**Loi de Rayleigh-Jeans**

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\,\nu^2.$$

On constate que $f_T(\nu) = \dfrac{2\pi k_B}{c^2}\,\dfrac{T}{\nu}\,\nu^3 = \nu^3 F\left(\dfrac{\nu}{T}\right)$.
Cependant, cette fonction n'atteint pas un maximum absolu, et de plus

$$\mathcal{R}_T = \int_0^\infty f_T(\nu)\,d\nu = \int_0^\nu \frac{2\pi k_B T}{c^2}\,\nu^2\,d\nu = \infty.$$



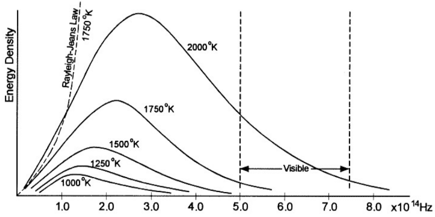

**Loi de Rayleigh-Jeans**

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\,\nu^2.$$

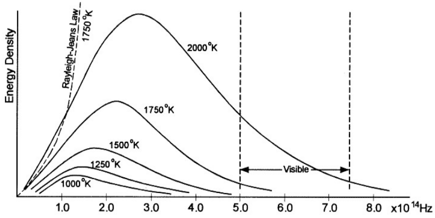
On constate que $f_T(\nu) = \dfrac{2\pi k_B}{c^2}\,\dfrac{T}{\nu}\,\nu^3 = \nu^3 F\left(\dfrac{\nu}{T}\right)$.
Cependant, cette fonction n'atteint pas un maximum absolu, et de plus

$$\mathcal{R}_T = \int_0^\infty f_T(\nu)\,d\nu = \int_0^\nu \frac{2\pi k_B T}{c^2}\,\nu^2\,d\nu = \infty.$$

**Ce n'est pas possible !**




La loi de Rayleigh-Jeans décrit très bien le lien entre les grandes longueur d'onde (*i.e.*, les faibles fréquences). Mais elle n'explique pas de façon cohérente la partie du spectre des hautes fréquences, comme l'ultraviolet.




La loi de Rayleigh-Jeans décrit très bien le lien entre les grandes longueur d'onde (*i.e.*, les faibles fréquences). Mais elle n'explique pas de façon cohérente la partie du spectre des hautes fréquences, comme l'ultraviolet.

Paul Ehrenfest a déclaré : **C'est la catastrophe ultraviolette !**


**La loi de Planck (1900)** L'énergie d'un oscillateur dans un corps noir est quantifiée et correspond à l'expression

$$E_n = nh\nu,$$

où $n$ est un nombre naturel, $\nu$ est la fréquence et $h$ est une constante ($h = 6,626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$).


**La loi de Planck (1900)** L'énergie d'un oscillateur dans un corps noir est quantifiée et correspond à l'expression

$$E_n = nh\nu,$$

où $n$ est un nombre naturel, $\nu$ est la fréquence et $h$ est une constante ($h = 6,626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$).

D'une manière originale, différente de ce que l'on avait avant, il se trouve que

$$\mathcal{P}(E_n) = (1 - e^{-\beta h\nu})\mathrm{e}^{-n\beta h\nu} \quad \text{et} \quad \langle E \rangle = \frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

**La loi de Planck (1900)** L'énergie d'un oscillateur dans un corps noir est quantifiée et correspond à l'expression

$$E_n = nh\nu,$$

où $n$ est un nombre naturel, $\nu$ est la fréquence et $h$ est une constante ($h = 6,626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$).

D'une manière originale, différente de ce que l'on avait avant, il se trouve que

$$\mathcal{P}(E_n) = (1 - e^{-\beta h\nu})\mathrm{e}^{-n\beta h\nu} \quad \text{et} \quad \langle E \rangle = \frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

En conséquence, $\boxed{f_T(\nu) = \dfrac{2\pi h\nu^3}{c^2}\,\dfrac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}}.$

## Déduction de la loi de Wien à partir de la formule de Planck

Remarquons d'abord que

$$f_T(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Maintenant, on maximise cette fonction, vue comme une application dépendant de $\lambda$ :

$$\varphi_T(\lambda) = f_T(\nu(\lambda)) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mu/\lambda} - 1}.$$

## Déduction de la loi de Wien à partir de la formule de Planck

Remarquons d'abord que

$$f_T(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \nu^3 \, F\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

Maintenant, on maximise cette fonction, vue comme une application dépendant de $\lambda$ :

$$\varphi_T(\lambda) = f_T(\nu(\lambda)) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mu/\lambda} - 1}.$$

En écrivant $x = \dfrac{\mu}{\lambda}$, on arrive à la condition $x\, e^x - 5(e^x - 1) = 0$, dont la solution est $x \approx 4,965$. Ce qui précède nous permet de conclure que

$$\lambda_{\text{máx}} T \approx \frac{hc}{4,965\, k_B}.$$

## Déduction de la loi de Stefan-Boltzmann à partir de la formule de Planck

On introduit la variable $x = \frac{h\nu}{k_B T}$, afin de calculer $\mathcal{R}_T$.

$$\mathcal{R}_T = \int_0^\infty f_T(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{2\pi\,k_B^4}{h^3c^2}\,T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx.$$

Ensuite, on utilise que $\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\,dx = \Gamma(4)\,\zeta(4)$, pour arriver à la conclusion finale

$$\mathcal{R}_T = \frac{2\pi^5\,k_B^4}{15\,h^3c^2}\,T^4.$$

*Merci pour votre attention !*